О некоторых соотношениях для числовых функций

А. Г. Чуич

В настоящей статье доказывается теорема, которая дает возможность находить значения некоторых числовых функций для данного целочисленного значения аргумента n, если известны делители всех чисел, меньших n.

Из этой теоремы вытекает ряд соотношений для многих известных числовых функций: для числа делителей данного числа в данном промежутке, для числа делителей данного числа, для суммы делителей данного числа, для суммы делителей данного числа в данном промежутке, для числа простых делителей данного числа. для числа простых делителей данного числа в данном промежутке, для суммы логарифмов простых чисел в данном промежутке, для числа простых чисел в данном промежутке и другие соотношения.

Обозначения: $f(n)$ — произвольная функция, которая однозначно определена для любого целого n; $[x]$ — целая часть x; $m, d, n, k, k_1, q, q_1, q_2$ — целые положительные числа, числа q, q_1, q_2 могут принимать значения $0, 1, 2, 3, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]$; p — простое число; s — вещественное число; $d \setminus n-q$ — d, есть делитель $n-q$; $\Phi(n)$ — числовая функция,

$$\Phi(n) = \sum_{d \setminus n} f(d), \tag{1}$$

где суммирование проводится по всем делителям d числа n; $\Phi(q+1, n-q)$ — числовая функция

$$\Phi(q+1, n-q) = \sum_{d \setminus n-q, d \geqslant q+1} f(d), \tag{2}$$

где суммирование проводится по всем делителям d числа $n-q$, принадлежащим промежутку $[q+1, n-q]$, в частности для $q=0$ имеем

$$\Phi(1\ n) = \Phi(n) = \sum_{d \setminus n} f(d) \tag{2'}$$

Вообще, если $F(n)$ обозначает некоторую числовую функцию, то $F(q+1, n-q)$ обозначает ту же числовую функцию, но определяемую в промежутке $[q+1, n-q]$.

Теорема *Для числовых функций $\Phi(n)$ и $\Phi(q+1, n-q)$, определенных согласно формулам (1) и (2), имеет место следующее соотношение:*

$$\Phi(n) + \Phi(2, n-1) + \Phi(3, n-2) + \ldots + \Phi(q+1, n-q) = \sum_{k=1}^{k=n} f(k). \tag{3}$$

$$q = \left[\frac{n-1}{2}\right]$$

Доказательство. Для доказательства заметим, что для всякого n делители правых концов промежутков $[q_1+1, n-q_1]$ и $[q_2+1, n-q_2]$ $(q_2 > q_1)$, попавшие в эти промежутки, не могут быть одинаковы.

Действительно, допустив противное, то есть что число d попадает в указанные промежутки и является одновременно делителем $n-q_1$ и $n-q_2$, получим сравнение: $n-q_1 \equiv n-q_2 \pmod d$ или $q_2 - q_1 \equiv 0 \pmod d$, то есть $d \leqslant q_2$, и, следовательно, d не попадает в промежуток $[q_2+1, n-q_2]$, что приводит к противоречию

Далее, запишем формулу (3) (согласно формулам (1) и (2)) в виде

$$\sum_{d \setminus n} f(d) + \sum_{\substack{d \setminus n-1 \\ d \geqslant 2}} f(d) + \sum_{\substack{d \setminus n-2 \\ \geqslant 3}} f(d) + \ldots + \sum_{\substack{d \setminus n-q \\ d \geqslant q+1}} f(d) = \sum_{k=1}^{k=n} f(k) \tag{4}$$

и установим, что для любого $1 \leqslant k \leqslant n$ величина $f(k)$ содержится в левой части равенства (4).

Действительно, представив число n в виде $n = mk + k_1$, где $k_1 < k$, имеем, что $n - k_1 = mk$, то есть число k является делителем числа $n-k_1$ и величина $f(k)$ будет находиться в левой части равенства (4) (все величины $f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n)$ слагаемые правой части равенства (4), являются и слагаемыми левой части этого же равенства).

Следовательно, сумма $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ будет содержаться и в левой части равенства (4), а так как количество всех делителей левой части равенства (4) не может быть больше n (в противном случае не все бы делители левой части равенства (4) были бы различны, что противоречило бы выше доказанному), то левая часть формулы (4) тождественно совпадает с правой, и теорема доказана

Доказанная теорема устанавливает соотношение между делителями данного числа n и делителями чисел, меньших n, и дает возможность находить значение многих числовых функций для данного значения n по значениям этих числовых функций для чисел, меньших n.

Рассмотрим теперь ряд следствий из данной теоремы.

Положив значение функции $f(k) = k^s$ в формуле (3) (s — вещественное число), обозначая через

$$\Phi_1(n) = \sum_{d \backslash n} d^s \tag{5}$$

через

$$\Phi_1(q+1, n-q) = \sum_{d \backslash n-q, d \geqslant q+1} d^s, \tag{6}$$

формулу (3) запишем в виде

$$\Phi_1(n) + \Phi_1(2, n-1) + \Phi_1(3, n-2) + \ldots + \Phi_1(q+1, n-q) = \sum_{k=1}^{k=n} k^s. \tag{7}$$

Из формулы (7) можно получить ряд различных соотношений между известными числовыми функциями.

1 Если в формуле (7) положить $s = 0$, то получим соотношение для числа делителей данного числа

$$\tau(n) + \tau(2, n-1) + \tau(3, n-2) + \ldots + \tau(q+1, n-q) = n, \tag{8}$$

($\tau(n)$ есть число делителей n и $\tau(q+1, n-q)$ — число делителей $n-q$ в промежутке $[q+1, n-q]$).

2 Если в формуле (7) положить $s = 1$, то получим подобное соотношение для суммы делителей данного числа

$$s(n) + s(2, n-1) + s(3, n-2) + \ldots + s(q+1, n-q) = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{9}$$

где $s(n)$ обозначает сумму делителей n.

3. Положив в формуле (7) $s = -2$, получим соотношение для функции $u(n)$, равной сумме квадратов обратных величин всех делителей данного числа n

$$u(n) + u(2, n-1) + u(3, n-2) + \ldots + u(q+1, n-q) = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} \tag{10}$$

Соотношения между числовыми функциями, связанные с простыми числами, можно получить, если в основной формуле (3) положить $f(k) = k^s = p^s$ (s — любое вещественное число) для k простого, $k = p$, и $f(k) = 0$ — для k составного. Тогда, обозначая через $\Phi_2(n)$ выражение

$$\Phi_2(n) = \sum_{p \backslash n} p^s, \tag{11}$$

через $\Phi_2(q+1, n-q)$ — выражение

$$\Phi_2(q+1, n-q) = \sum_{p \backslash n-q, p \geqslant q+1, q = \left[\frac{n-1}{2}\right]} p^s, \tag{12}$$

соотношение (3) преобразуем к виду

$$\Phi_2(n) + \Phi_2(2, n-1) + \Phi_2(3, n-2) + \ldots + \Phi_2(q+1, n-q) = \sum_{p \leqslant n} p^s. \quad (13)$$

где суммирование в правой части формулы (13) проводится по всем простым числам $\leqslant n$.

Из формулы (13) можно получить различные соотношения между числовыми функциями, связанными простыми числами.

Положив в формуле (13) $s = 0$, получим соотношение, связывающее функцию $\pi(n)$, равную числу простых чисел от 2 до n, с числами простых делителей различных чисел:

$$\rho(n) + \rho(2, n-1) + \rho(3, n-2) + \ldots + \rho(q+1, n-q) = \pi(n), \quad (14)$$

где $\rho(n)$ есть число простых делителей n, а $\rho(q+1, n-q)$ — число простых делителей $n-q$ в промежутке $[q+1, n-q]$.

Положив в основной формуле (3) $f(k) = \ln k = \ln p$ для k простого, $k = p$, и $f(k) = 0$ — для k составного, обозначая через $\Theta(n)$ сумму логарифмов простых чисел, не превосходящих n, через $A(n) = \sum_{p \setminus n} \ln p$ — сумму логарифмов всех простых делителей n, через $A(q+1, n-q) = \sum_{p \setminus n-q} \ln p$ — сумму логарифмов всех простых делителей $n-q$ в промежутке $[q+1, n-q]$, получим

$$A(n) + A(2, n-1) + A(3, n-2) + \ldots + A(q+1, n-q) = \Theta(n). \quad (15)$$

Поступила 17. XII 1958 г.
Никополь