Об одном отношении Галуа в теории групп

Н. В. Дюмин

Эта работа, являясь продолжением статьи Л. А. Калужнина [1], содержит обобщение ее основных понятий и некоторых теорем. В дальнейшем, если не оговорено противное, будем пользоваться терминологией и определениями указанной статьи.

Напомним те основные положения из [1], которые намереваемся обобщить.

Пусть V — векторное пространство конечной размерности n над полем K и пусть

$$V = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \cdots \supset V_{k-1} \supset V_k = \{0\} — \tag{1}$$

цепочка векторных подпространств*. Группа $\mathfrak{A}$ всех тех автоморфизмов пространства V, для которых подпространства V_i $(i = 0, 1, \ldots k-1)$ допустимы и которые во всех фактор-пространствах V_i/V_{i+1} индуцируют тождественные автоморфизмы, называется группой устойчивости ряда (1).

О соответствии между рядами подпространств пространства V и группами устойчивости $\mathfrak{A}$ доказаны следующие утверждения:

1. Верхний (нижний) $\mathfrak{A}$-центральный ряд пространства совпадает с исходным рядом (1).

2. Допустимыми относительно группы $\mathfrak{A}$ являются те и только те подпространства, которые удовлетворяют одному из включений: $V_i \supseteq W \supseteq V_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$.

3. Группа $\mathfrak{A}$ является пересечением всех содержащих ее 1-треугольных подгрупп** полной линейной группы $GL_n(K)$, причем в каждой из этих подгрупп группа $\mathfrak{A}$ инвариантна.

4. Свойство 3 вполне определяет группу устойчивости, то есть всякая

* Знак $\supset$ употребляется для обозначения строгого включения, а знак $\supseteq$ — для обозначения включения в широком смысле.

**) 1-треугольная матрица—это матрица вида

$$\begin{Vmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & A & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{Vmatrix};$$

1-треугольная подгруппа группы $GL_n(K)$ — эта группа всех 1-треугольных матриц.

группа, обладающая свойством 3, есть группа устойчивости некоторого ряда подпространств.

5. Класс нильпотентности группы устойчивости ряда (1) равен $k-1$.

Таковы основные результаты работы [1].

Ниже обобщается понятие группы устойчивости и доказываются теоремы, аналогичные сформулированным выше.

Рассмотрим два ряда подпространств (пространства V):

$$V = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_{k-1} \supset V_k = \{0\}$$

и

$$V = W_0 \supseteq W_1 \supseteq W_2 \supseteq \dots \supseteq W_{k-1} \supseteq W_k = \{0\},$$

подчиненных включениям $V_i \supseteq W_i$, где $i = 1, 2, \dots, k-1$. Совокупность двух таких рядов будем называть *схемой* и подробно записывать так:

$$\begin{array}{ccccccccccc} V = V_0 \supset & V_1 & \supset & V_2 & \supset \dots \supset & V_{k-1} & \supset V_k = \{0\} \\ & \cup\!| & & \cup\!| & & \cup\!| & \\ V = W_0 \supseteq & W_1 & \supseteq & W_2 & \supseteq \dots \supseteq & W_{k-1} & \supseteq W_k = \{0\}. \end{array} \tag{2}$$

Первый ряд назовем *верхним*, а второй — *нижним*.

Определение. *Группой устойчивости схемы (2) назовем группу $\mathfrak{B}$ всех тех автоморфизмов пространства V, для которых подпространства V_i и W_i ($i = 1, 2 \dots k-1$) допустимы и которые в фактор-пространствах V_j/W_{j+1} ($j=0, 1, \dots, k-1$) индуцируют тождественные автоморфизмы.*

Введенное понятие обобщает понятие группы устойчивости ряда. Последнее получается из нашего определения в частном случае $V_i = W_i$ ($i = 1, 2, \dots k-1$).

Пусть в схеме (2) для некоторого i имеет место равенство $W_i = W_{i+1}$. Тогда схема

$$\begin{array}{l} V = V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_{i-1} \supset V_{i+1} \supset \dots \supset V_{k-1} \supset V_k = \{0\} \\ V = W_0 \supseteq W_1 \supseteq \dots \supseteq W_{i-1} \supseteq W_{i+1} \supseteq \dots \supseteq W_{k-1} \supseteq W_k = \{0\} \end{array} \tag{2'}$$

обладает, как следует из определения, той же группой устойчивости, что и схема (2). Назовем переход от схемы (2) к схеме (2′) *сокращением схемы* (2).

С другой стороны, если в схеме (2) подпространство V_i не покрывает (подпространство V_{i+1} (то есть размерность фактор-пространства V_i/V_{i+1} не равна 1), то схема

$$\begin{array}{l} V = V_0 \supset V_1 \supset \dots \supset V_i \supset V'_{i+1} \supset V_{i+1} \supset \dots \supset V_{k-1} \supset V_k = \{0\} \\ V = W_0 \supseteq W_1 \supseteq \dots \supseteq W_i \supseteq W_{i+1} = W_{i+1} \supseteq \dots \supseteq W_{k-1} \supseteq W_k = \{0\}, \end{array} \tag{2''}$$

где V'_{i+1} — произвольное промежуточное подпространство между V_i и V_{i+1}, обладает, как опять следует из определения, той же группой устойчивости, что и (2). Назовем переход от схемы (2) к схеме (2″) *уплотнением схемы* (2).

Выполняя последовательно сокращения и уплотнения, получаем, вообще говоря, много схем с одной и той же группой устойчивости $\mathfrak{B}$. Легко усмотреть, что среди них есть только одна схема, не поддающаяся сокращениям. Назовем ее *несократимой* [она получается из схемы (2) выполнением всех возможных сокращений в любом порядке]. Среди рассматриваемых схем есть также неуплотняемые схемы. Будем называть их *композиционными*.

В дальнейшем основную роль будет играть несократимая схема, но иногда будет удобно пользоваться композиционной.

1. Прежде всего выберем базис пространства V, в котором группа $\mathfrak{B}$ имеет особенно удобный для изучения вид. Для этого будем исходить из

некоторой композиционной схемы, соответствующей нашей группе $\mathfrak{B}$:

$$\begin{array}{l} V = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_{n-1} \supset V_n = \{0\} \\ \phantom{V = V_0 \supset{}} \cup| \phantom{{}\supset V_2{}} \cup| \phantom{{}\supset \ldots \supset{}} \cup| \\ V = W_0 \supseteq W_1 \supseteq W_2 \supseteq \ldots \supseteq W_{n-1} \supseteq W_n = \{0\}. \end{array} \tag{3}$$

Составим для нее матрицу M, в которой на месте с координатами (i, j) $(i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, n-1)$ поместим

$$0, \text{ если } W_i \cap V_j = W_i \cap V_{j+1}$$

и

$$1, \text{ если } W_i \cap V_j \supset W_i \cap V_{j+1}$$

(легко видеть, что во втором случае разность размерностей подпространств $W_i \cap V_j$ и $W_i \cap V_{j+1}$ равна 1).

Включения (3) и последнее замечание показывают, что матрица M обладает следующими (основными) свойствами:

а) первая строка состоит только из единиц;

б) под главной диагональю находятся только нули;

в) под нулем всегда находится нуль;

г) сумма элементов i-й строки равна размерности подпространства W_i.

С помощью матрицы M следующим образом выбираем искомый базис.

Пусть $t(j)$ есть наибольший из индексов i, для которых $m_{ij} = 1$. Тогда $W_{t(j)} \cap V_j \supset W_{t(j)} \cap V_{j+1}$, но $W_{t(j)+1} \cap V_j = W_{t(j)+1} \cap V_{j+1}$, откуда следует, что для любого $j = 0, 1, \ldots, n-1$ найдется такой вектор e_{j+1}, что

$$e_{j+1} \in V_j;\ \bar{\in} V_{j+1};\ \in W_{t(j)};\ \bar{\in} W_{t(j)+1}.$$

Из первых двух отношений видно, что векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независимы. Выбранный таким образом базис назовем *специальным*. Его преимущества заключаются в том, что

$$1)\ e_{j+1} \in V_j;\ \bar{\in} V_{j+1} \quad (j = 0, 1, \ldots, n-1),$$

2) $W_i = \{e_{i_1+1}, e_{i_2+1}, \ldots, e_{i_f+1}\}$, если $(i, i_1), (i, i_2), \ldots, (i, i_f)$ — координаты всех единиц, находящихся в i-й строке матрицы M (второе свойство объясняется тем, что по построению $W_i \supseteq \{e_{i_1+1}, e_{i_2+1}, \ldots, e_{i_f+1}\}$, а размерность подпространства W_i равна f).

Посмотрим, из каких матриц состоит группа $\mathfrak{B}$ в этом специальном базисе. Если $\alpha \in \mathfrak{B}$, то, по определению группы устойчивости схемы,

$$e_i\alpha = e_i + w_i \quad (w_i \in W_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4}$$

Обратно, если некоторый автоморфизм α определен равенствами (4), где w_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — произвольные векторы из подпространств W_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ соответственно, то $\alpha \in \mathfrak{B}$. Отсюда, учитывая свойство 2) специального базиса, получаем, что группа устойчивости $\mathfrak{B}$ нашей схемы состоит из всех 1-треугольных матриц, в которых над главной диагональю на определенных местах всегда находятся нули, а на остальных — произвольные коэффициенты, причем ниже нулевого места всегда находится нулевое место (нетрудно заметить, что место с координатами (i, j), где $i < j$, нулевое тогда и только тогда, когда в матрице M на месте $(i, j-1)$ находится нуль). Описанный здесь матричный вид группы $\mathfrak{B}$ в специальном базисе назовем *специальным*.

Рассмотрим пример. Пусть при $n=6$ (см. схему (3)) матрица M имеет вид

$$\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|.$$

Выберем специальный базис e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6. Тогда схема (3) примет вид

$$\begin{array}{ccccccccccccc} V=V_0 & \supset & \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} & \supset & \{e_3, e_4, e_5, e_6\} & \supset & \{e_4, e_5, e_6\} & \supset & \{e_5, e_6\} & \supset & \{e_6\} & \supset & \{0\} \\ & & \| & & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \\ V=W_0 & \supset & \{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} & \supset & \{e_3, e_5, e_6\} & \supset & \{e_5\} & \supset & \{0\} & = & \{0\} & = & \{0\}. \end{array}$$

Группа устойчивости $\mathfrak{B}$ этой схемы состоит из всех матриц вида

$$\left\|\begin{matrix} 1 & * & * & * & * & * \\ & 1 & * & 0 & * & * \\ & & 1 & 0 & * & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ & & & & & 1 \end{matrix}\right\|,$$

где (*) обозначает произвольный коэффициент.

В дальнейшем наряду со специальным базисом нам понадобится базис *полуспециальный*, то есть такой базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что $a_{i+1} \in V_i$; $\overline{\in} V_{i+1}$ $(i=0, 1, \ldots, n-1)$ [см. схему (3)]. При таком выборе базиса автоморфизм α принадлежит группе устойчивости $\mathfrak{B}$ схемы (3) тогда и только тогда, когда

$$a_i\alpha = a_i + w_i \quad (w_i \in W_i),\ i=1, 2, \ldots, n.$$

Это непосредственно следует из определения группы устойчивости схемы.

2. Как уже установлено, группа устойчивости некоторой схемы в специальном базисе имеет специальный вид. Покажем, что это свойство групп устойчивости схем характеристично, то есть что любая группа автоморфизмов, имеющая при некотором выборе базиса специальный вид, является группой устойчивости некоторой схемы.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис, в котором рассматриваемая группа автоморфизмов $\mathfrak{A}$ имеет специальный вид. Тогда легко построить схему, для которой базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ является специальным и группа устойчивости которой совпадает с $\mathfrak{A}$.

Действительно, положим $V_i = \{e_{i+1}, \ldots, e_n\}$, $W_i = \{e_i\alpha - e_i\}$, где автоморфизм α пробегает всю группу $\mathfrak{A}$. Проверка тривиальна.

3. Рассмотрим нижний и верхний $\mathfrak{B}$-центральные ряды пространства V. Пусть $\mathfrak{B}$ — группа устойчивости несократимой схемы

$$\begin{array}{ccccccccccc} V=V_0 & \supset & V_1 & \supset & V_2 & \supset & \ldots & \supset & V_{k-1} & \supset & V_k=\{0\} \\ & & \cup\!\! | & & \cup\!\! | & & & & \cup\!\! | & & \\ V=W_0 & \supset & W_1 & \supset & W_2 & \supset & \ldots & \supset & W_{k-1} & \supset & W_k=\{0\}. \end{array} \tag{5}$$

Введем две числовые функции:

$$\varphi(i) = j, \text{ если } W_i \subseteq V_{j-1}, \text{ но } W_i \not\subseteq V_j \text{ (ясно, что } i < j),$$
$$\psi(i) = h, \text{ если } V_i \supseteq W_{h+1}, \text{ но } V_i \not\supseteq W_h \text{ (ясно, что } i > h).$$

Теорема 1. *Нижним $\mathfrak{B}$-центральным рядом пространства V является ряд*

$$V \supset V_{\varphi(0)} \supset W_{\varphi^2(0)} \supset W_{\varphi^3(0)} \supset \ldots,$$

а верхним — ряд

$$\ldots \supset V_{\psi^3(k)} \supset V_{\psi^2(k)} \supset V_{\psi(k)} \supset \{0\}.$$

Доказательство первого утверждения проведем индукцией по степеням функции φ. $\varphi(0) = 1$, причем нетрудно заметить, что W_1 есть первый $\mathfrak{B}$-коммутант. Предположим, что $W_{\varphi^i(0)}$ есть i-й $\mathfrak{B}$-коммутант. Покажем, что $W_{\varphi^{i+1}(0)}$ есть $(i+1)$-й $\mathfrak{B}$-коммутант. Действительно, по определению функции φ, имеем:

$$W_{\varphi^i(0)} \subseteq V_{\varphi^{i+1}(0)-1}, \text{ но } W_{\varphi^i(0)} \not\subseteq V_{\varphi^{i+1}(0)}.$$

Из первого соотношения следует, что $K(W_{\varphi^i(0)}, \mathfrak{B}) \subseteq K(V_{\varphi^{i+1}(0)-1}, \mathfrak{B}) = W_{\varphi^{i+1}(0)}$. Из второго же соотношения вытекает, что здесь точное равенство. В самом деле, так как $W_{\varphi^i(0)} \not\subseteq V_{\varphi^{i+1}(0)}$, найдется такой вектор w, что $w \in W_{\varphi^i(0)}$; $\overline{\in} V_{\varphi^{i+1}(0)}$. Тогда для любого элемента $w' \in W_{\varphi^{i+1}(0)}$ найдется такой автоморфизм $\alpha \in \mathfrak{B}$, что $w\alpha = w + w'$. Это значит, что $K(W_{\varphi^i(0)}, \mathfrak{B}) = W_{\varphi^{i+1}(0)}$. Доказательство второго утверждения теоремы аналогично, только построение надо начинать с нулевого подпространства $\{0\}$ и пользоваться функцией $\psi(i)$.

Так как $\varphi(0) < \varphi^2(0) < (\varphi)^3(0) < \ldots$ и $\psi(k) > \psi^2(k) > \psi^3(k) > \ldots$, оба ряда обрываются (первый на нулевом подпространстве $\{0\}$, второй же — на всем пространстве V). Как следует из [1], длины их равны.

4. Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{B}$ — группа устойчивости композиционной схемы*

$$\begin{array}{ccccccccccc} V = V_0 & \supset & V_1 & \supset & V_2 & \supset & \ldots & \supset & V_{n-1} & \supset & V_n = \{0\} \\ & & \cup\vert & & \cup\vert & & & & \cup\vert & & \\ V = W_0 & \supseteq & W_1 & \supseteq & W_2 & \supseteq & \ldots & \supseteq & W_{n-1} & \supseteq & W_n = \{0\}. \end{array}$$

Подпространство W допустимо относительно группы $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда для некоторого i имеет место включение $V_i \supseteq W \supseteq W_{i+1}$.

Доказательство. 1) Достаточность этого свойства следует из определения группы $\mathfrak{B}$. 2) Необходимость. Пусть подпространство W допустимо относительно группы $\mathfrak{B}$. Пусть i таково, что $V_i \supseteq W$, но $V_{i+1} \not\supseteq W$. Тогда существует такой вектор a_{i+1}, что $a_{i+1} \in W$; $\in V_i$; $\overline{\in} V_{i+1}$. Выберем полуспециальный базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$, содержащий вектор a_{i+1}. Пусть теперь автоморфизм $\alpha \in \mathfrak{B}$ такой, что

$$a_j\alpha = a_j \quad (j \neq i+1),$$

$$a_{i+1}\alpha = a_{i+1} + w_{i+1},$$

где w_{i+1} — произвольный вектор из W_{i+1}. Отсюда $w_{i+1} = a_{i+1}\alpha - a_{i+1}$, но ведь $a_{i+1} \in W$ и подпространство W допустимо относительно $\mathfrak{B}$, значит $W \supseteq W_{i+1}$.

Теорема доказана.

В качестве следствия из теоремы 2 легко получить аналогичное утверждение для случая, когда исходная схема является несократимой (а не композиционной).

Отметим еще, что доказанная теорема характеризует внутренним образом структуру всех подпространств, допустимых относительно группы $\mathfrak{B}$. Это структура, содержащая некоторую схему (2) и состоящая из всех подпространств W, таких, что для некоторого i $V_i \supseteq W \supseteq W_{i+1}$.

5. Теорема 3. *Группа $\mathfrak{B}$ является пересечением всех содержащих ее 1-треугольных групп.*

Доказательство. Зафиксируем специальный базис. Группа $\mathfrak{B}$ в этом базисе имеет специальный вид. Пусть (i_t, j_t), где $i_t < j_t$, $t = 1, 2, \ldots r$ — координаты тех нулевых мест, над которыми находятся ненулевые места (или нет никаких мест). Тогда, как нетрудно заметить, матричная группа $\mathfrak{B}$ представляет собой пересечение групп $\mathfrak{B}_t$ $(t = 1, 2, \ldots, r)$, где $\mathfrak{B}_t$ — группа, состоящая из всех 1-треугольных матриц, в которых над главной диагональю на месте (i_t, j_t) и ниже всегда находятся нули, а на остальных местах — произвольные элементы основного поля. Например, если $n = 6$, $(i_t, j_t) = (2, 5)$, то группа $\mathfrak{B}_t$ состоит из всех матриц вида

$$\begin{Vmatrix} 1 & * & * & * & * & * \\ & 1 & * & * & 0 & * \\ & & 1 & * & 0 & * \\ & & & 1 & 0 & * \\ & & & & 1 & * \\ & & & & & 1 \end{Vmatrix},$$

где (*) обозначает произвольный коэффициент. Каждая же из групп $\mathfrak{B}_t$ $(t = 1, 2, \ldots, r)$, в свою очередь, представима как пересечение двух 1-треугольных подгрупп, а именно, группы всех 1-треугольных матриц в базисе, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и группы всех 1-треугольных матриц в базисе $e_1, \ldots, e_{i_t - 1}$, $e_{j_i}, e_{i_t}, e_{i_t+1}, \ldots, e_{j_t-1}, e_{j_t+1}, \ldots, e_n$. Чтобы убедиться в этом, нужно только вторую 1-треугольную группу рассмотреть также в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Этим теорема доказана.

6. Теорема 4. *Группы устойчивости схем, имеющих общий верхний ряд, образуют относительно включения дедекиндову структуру.*

Доказательство. Докажем теорему в наиболее общем случае, когда все рассматриваемые схемы являются композиционными. Группы устойчивости этих схем находятся во взаимнооднозначном соответствии со своими схемами, имеющими общий верхний ряд, так как разным таким схемам соответствуют, конечно, разные группы устойчивости. Пусть схеме

$$\begin{array}{ccccccccccccc} V = V_0 & \supset & V_1 & \supset & V_2 & \supset & \ldots & \supset & V_{n-1} & \supset & V_n = \{0\} \\ & & \cup\vert & & \cup\vert & & & & \cup\vert & & \\ V = W'_0 & \supseteq & W'_1 & \supseteq & W'_2 & \supseteq & \ldots & \supseteq & W'_{n-1} & \supseteq & W'_n = \{0\} \end{array} \tag{6}$$

соответствует группа $\mathfrak{B}_1$, а схеме

$$\begin{array}{ccccccccccccc} V = V_0 & \supset & V_1 & \supset & V_2 & \supset & \ldots & \supset & V_{n-1} & \supset & V_n = \{0\} \\ & & \cup\vert & & \cup\vert & & & & \cup\vert & & \\ V = W''_0 & \supseteq & W''_1 & \supseteq & W''_2 & \supseteq & \ldots & \supseteq & W'_{n-1} & \supseteq & W''_n = \{0\} \end{array} \tag{7}$$

соответствует группа $\mathfrak{B}_2$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Включение $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}_2$ имеет место тогда и только тогда, когда для всех $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ справедливы включения $W'_i \subseteq W''_i$.

2. Схеме с нижним рядом $W'_1 \cap W'_1 \supseteq W'_2 \cap W_2 \supseteq \ldots \supseteq W'_{n-1} \cap W'_{n-1}$ соответствует группа $\mathfrak{B}_1 \cap \mathfrak{B}_2$.

3. Схеме с нижним рядом $W'_1 + W'_1 \supseteq W'_2 + W'_2 \supseteq \ldots \supseteq W'_{n-1} + W''_{n-1}$ соответствует группа $\{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2\}$.

Докажем только нетривиальное третье свойство.

Пусть $\mathfrak{B}$ — группа устойчивости указанной схемы. Необходимо установить, что $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2\}$.

В силу утверждения 1 имеет место включение $\mathfrak{B} \supseteq \{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2\}$.

Покажем, что здесь точное равенство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — полуспециальный базис, пусть $\alpha \in \mathfrak{B}$. Тогда $a_i\alpha = a_i + w_i' + w_i''$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где $w_i' \in W_i'$, $w_i'' \in W_i''$.

Теперь достаточно автоморфизм α представить в виде $\alpha_1\alpha_2$, где $\alpha_1 \in \mathfrak{B}_1$, $\alpha_2 \in \mathfrak{B}_2$.

Полагаем $a_i\alpha_1 = a_i + w_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Этим указан автоморфизм $\alpha_1 \in \mathfrak{B}_1$. Будем определять действие автоморфизма α_2 последовательно на векторах $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$: $a_n\alpha_2 = a_n$. Пусть действие автоморфизма α_2 уже определено на векторах $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{i+1}$. Тогда полагаем $a_i\alpha_2 = a_i + [w_i'' - (w_i'\alpha_2 - w_i']$. Здесь $w_i' \in V_i$, откуда $w_i'\alpha_2 - w_i' \in W_{i+1}''$, а следовательно, $w_i'' - (w_i'\alpha_2 - w_i') \in W_i''$.

Таким образом, автоморфизм α_2 определен.

Проверим, что $\alpha = \alpha_1\alpha_2$. Действительно, при $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} a_i\alpha_1\alpha_2 &= (a_i + w_i')\alpha_2, \\ &= a_i\alpha_2 + w_i'\alpha_2, \\ &= a_i + [w_i'' - (w_i'\alpha_2 - w_i')] + w_i'\alpha_2, \\ &= a_i + w_i' + w_i'' = a_i\alpha. \end{aligned}$$

Поэтому $\alpha = \alpha_1\alpha_2$.

Итак, $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2\}$.

Из утверждений 2 и 3 следует, что все рассматриваемые группы образуют структуру. Полагая, что схема (6) предшествует схеме (7), если $W_i' \subseteq \subseteq W_i''$ при $i = 1, 2, \ldots, n-1$, мы получаем в силу утверждений 1—3 структурный изоморфизм между структурой, состоящей из схем с общим верхним рядом, и структурой соответствующих групп устойчивости. Первая же из этих решеток дедекиндова, так как операции пересечения и объединения схем сводятся к почленному пересечению и объединению их нижних рядов, а решетка векторных подпространств пространства V дедекиндова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Калужнин, Об одном отношении Галуа в теории групп, УМЖ, т. XI, № 1, 1959.

Поступила 1. VII 1960 г.
Киев

On some Galois relations in the theory of groups

N. V. Dumin

Summary

Let V be a linear space of finite dimension n over a field K. Let us consider two chains of subspaces

$$V = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \ldots \supset V_{k-1} \supset \{0\}$$

$$V = W_0 \supseteq W_1 \supseteq W_2 \ldots \supseteq W_{k-1} \{0\}$$

where $V_i \supseteq W_i$, $i = 1, 2, \ldots k-1$. This pair of chains will be named a scheme.

Definition. The stability group for a given scheme is the group of all automorphisms of V inducing the identity in all factor spaces

$$V_i/W_{i+1},\ i = 0, 1, \ldots, k-1.$$

The properties proved in theorems 1, 2, 3 of the present paper extend, to stability groups of a scheme, some of the results for stability groups of chains contained in a paper of Kaloujnine (1).