Решение уравнений движения уравновешенного гироскопа методом усреднения

Р. М. Бородина

В 1955 году К. Магнус [2] открыл явление азимутального ухода гироскопа под влиянием нутационных колебаний. Эти же результаты получили в своих работах Плаймель В. Т. [4], Гудстейн Р. [3], Павлов В. А. [5], Пельпор Д. С. [6].

В настоящей заметке решение дифференциальных уравнений движения уравновешенного гироскопа производится методом усреднения Крылова—Боголюбова [1].

Уравнения движения свободного гироскопа с учетом моментов инерции колец карданового подвеса, составленные методом Лагранжа, записываются в виде

$$\frac{d}{dt}\left\{[A_1 + (A' + A)\cos^2\beta + (C' + C)\sin^2\beta]\frac{d\alpha}{dt} + C\frac{d\varphi}{dt}\sin\beta\right\} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left[(B' + A)\frac{d\beta}{dt}\right] + \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 (A' + A - C' - C)\sin\beta\cos\beta - \tag{1}$$

$$- C\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\cos\beta = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left[C\frac{d\varphi}{dt} + C\frac{d\alpha}{dt}\sin\beta\right] = 0,$$

где α — угол прецессии, β — угол нутации, φ — угол собственного вращения; A, B, C, A', B', C', A_1, B_1, C_1 — моменты инерции соответственно ротора, внешнего и внутреннего кольца.

Первое и третье уравнения сразу же дают два циклических интеграла

$$[A_1 + (A' + A)\cos^2\beta + (C' + C)\sin^2\beta]\frac{d\alpha}{dt} + C\frac{d\varphi}{dt}\sin\beta = H\sin\beta_0,$$

$$C\left(\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\alpha}{dt}\sin\beta\right) = H, \tag{2}$$

где H — кинетический момент.

Уравнения (1) удовлетворяются при постоянных углах прецессии и нутации α_0 и β_0 и при равномерном вращении ротора.

Уравнения возмущенного движения с точностью до величин третьего порядка относительно малых возмущений $\varepsilon\alpha$ и $\varepsilon\beta$ имеют вид

$$A_0 \frac{d\alpha}{dt} + H_0\beta = \varepsilon\left(D_0 \frac{d\alpha}{dt}\beta + \frac{1}{2}C_0\beta^2\right) + \varepsilon^2\left(E_0 \frac{d\alpha}{dt}\beta^2 + \frac{1}{6}H_0\beta^3\right),$$

$$B_0 \frac{d^2\beta}{dt^2} - H_0\beta = -\varepsilon\left[\frac{D_0}{2}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + C_0\beta\frac{d\alpha}{dt}\right] - \varepsilon^2\left[E_0\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2\beta + \frac{1}{2}H_0\beta^2\frac{d\alpha}{dt}\right], \tag{3}$$

где

$$A_1 + (A' + A)\cos^2\beta_0 + (C' + C)\sin^2\beta_0 = A^*, \quad B' + A = B_0,$$

$$A_0 = A^* - C\sin^2\beta_0,\ H_0 = H\cos\beta_0,\ C_0 = H\sin\beta_0,\ D_0 = (A' + A - C')\sin 2\beta_0,$$

$$E_0 = (A' + A - C')\cos 2\beta_0.$$

При $\varepsilon = 0$ линейная система имеет решение

$$\beta = c\cos(\omega_1 t + \theta),$$

$$\alpha = -\frac{H_0 c}{A_0\omega_1}\sin(\omega_1 t + \theta) + c_2, \tag{4}$$

где $\omega_1 = \dfrac{H_0}{\sqrt{A_0\beta_0}}$, а c, θ, c_2 — постоянные интегрирования.

Произведем в уравнениях (3) замену переменных по формуле (4), считая c, θ, c_2 новыми переменными. Относительно новых переменных после ряда выкладок получаем следующую систему уравнений в стандартной форме

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon bc\cos^3\psi + \varepsilon^2 dc^2\cos^4\psi,$$

$$\frac{dc}{dt} = \varepsilon bc^2\sin\psi\cos^2\psi + \varepsilon^2 dc^3\sin\psi\cos^3\psi,$$

$$\frac{dc_2}{dt} = \varepsilon ac^2\cos^2\psi + \varepsilon^2 fc^3\cos^3\psi,$$

$$a = \frac{D_0H_0 - 2C_0A_0}{2A_0^2}, \quad f = \frac{2E_0H_0 - H_0A_0}{2A_0^2},$$

$$b = \frac{3(H_0D_0 - C_0A_0)\omega_1}{2H_0A_0}, \quad d = -\frac{2\omega_1(H_0A_0 - 3E_0H_0)}{H_0A_0}, \quad \psi = \omega_1 t + \theta.$$

Так как производные от новых переменных пропорциональны малому параметру, то, следовательно, сами функции будут медленно изменяющимися величинами. Представим их как суперпозицию плавно изменяющегося члена и суммы вибрационных членов.

Ввиду малости последних в первом приближении полагаем $c_2 = \bar{c}_2$, $c = \bar{c}$, $\theta = \bar{\theta}$, где $\bar{c}_2$, $\bar{c}$, $\bar{\theta}$ удовлетворяют уравнениям первого приближения

$$\frac{d\bar{c}_2}{dt} = \frac{1}{2}\varepsilon a\bar{c}^2,$$

$$\frac{d\bar{c}}{dt} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = 0,$$

откуда $\bar{c}=\text{const}$, $\bar{\theta}=\text{const}$ и $c_2=\frac{1}{2}\varepsilon a\bar{c}^2 t+c_1$, где c_1 — постоянная интегрирования. Произвольные постоянные определяются из начальных условий.

Проанализируем полученное решение. Если произвести удар по внутреннему кольцу, то начальные условия определяются следующими равенствами: $\alpha=0$, $\dot{\alpha}=0$, $\beta=0$, $\dot{\beta}=\dot{\beta}_0$. Произвольные постоянные —

$$\bar{\theta}=\frac{\pi}{2}, \quad \bar{c}=-\frac{\dot{\beta}_0}{\omega_1}, \quad c_1=-\frac{H_0\dot{\beta}_0}{A_0\omega_1^2}. \tag{7}$$

Если $a=\frac{D_0H_0-2C_0A_0}{2A_0^2}=-\frac{H(A_1+C')\sin\beta_0}{A_0^2}=0$, что может быть, когда рамки внешнего и внутреннего колец взаимно перпендикулярны ($\sin\beta_0=0$) либо когда не учитываются моменты инерции рамок, тогда $\frac{d\bar{c}_2}{dt}=0$, и уходов по углу α не будет: возмущенное движение будет носить колебательный характер, а основное движение будет представлять собой малые колебания (при малых ударах) возле постоянного направления оси ротора гироскопа. Если же $\beta_0\neq 0$ и $\dot{\beta}_0\neq 0$, то движение гироскопа представляется в первом приближении выражениями

$$\begin{aligned} \beta &= \bar{c}\cos(\omega_1 t+\theta), \\ \alpha &= -\frac{H_0\bar{c}}{A_0\omega_1}\sin(\omega_1 t+\bar{\theta})+\frac{1}{2}\varepsilon a\bar{c}^2 t+c_1, \end{aligned} \tag{8}$$

где $\bar{c}$, $\bar{\theta}$, c_1 определяются по формулам (7).

Под действием удара угол $\beta_0=0$ может изменяться. Тогда $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{\text{ср}}=\frac{1}{2}\varepsilon a\bar{c}^2$, то есть гироскоп будет медленно уходить по углу α со скоростью, пропорциональной квадрату амплитуды нутационных колебаний. Таким образом, основное движение будет неустойчивым.

Второе приближение определяется формулами

$$\begin{aligned} c &= \bar{c}-\frac{1}{4\omega_1}\varepsilon b\bar{c}^2\cos\bar{\psi}-\frac{1}{12\omega_1}\varepsilon b\bar{c}^2\cos 3\bar{\psi}, \\ c_2 &= \bar{c}_2+\frac{\varepsilon a\bar{c}^2}{4\omega_1}\sin 2\bar{\psi}, \\ \theta &= \bar{\theta}+\frac{3}{4\omega_1}\varepsilon b\bar{c}\sin\bar{\psi}+\frac{1}{12\omega_1}\varepsilon b\bar{c}\sin 3\bar{\psi}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\bar{\psi}=\omega_1 t+\bar{\theta}$, а $\bar{c}$, $\bar{c}_2$, $\bar{\theta}$ удовлетворяют уравнениям второго приближения

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{c}_2}{dt} &= \frac{1}{2}\varepsilon a\bar{c}^2, \\ \frac{d\bar{c}}{dt} &= 0, \\ \frac{d\bar{\theta}}{dt} &= \varepsilon^2\left(\frac{3}{8}d\bar{c}^2-\frac{5b^2}{12\omega_1}\bar{c}^2\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Движение гироскопа описывается во втором приближении выражениями

$$\beta = \bar{c}\cos(\omega_1 t + \bar{\theta}) + \varepsilon\left[-\frac{1}{2}\frac{b\bar{c}^2}{\omega_1} + \frac{1}{6}\frac{b\bar{c}^2}{\omega_1}\cos 2(\omega_1 t + \bar{\theta})\right],$$

$$\alpha = -\frac{H_0\bar{c}}{A_0\omega_1}\sin(\omega_1 t + \bar{\theta}) + \varepsilon\left[\frac{a\bar{c}^2}{2\omega_1} - \frac{1}{3}\frac{H_0 b\bar{c}^2}{A_0\omega_1^2}\right]\sin 2(\omega_1 t + \bar{\theta}) + \bar{c}_2, \tag{11}$$

где $\bar{c}$, $\bar{c}_2$, $\bar{\theta}$ определяются из уравнений второго приближения (10).

Амплитуда нутационных колебаний сохраняет постоянное значение во время движения, так как система консервативна, а фазовый угол вращается с постоянной угловой скоростью $\omega_1 + \frac{3}{8}\varepsilon^2 d\bar{c}^2 - \frac{5}{12}\varepsilon^2\frac{b^2\bar{c}^2}{\omega_1}$, зависящей от амплитуды. В первом приближении система изохронна [см. (6)], то есть исследуемая система (10) квазиизохронна. В ней возможны колебания с любой постоянной амплитудой в зависимости от начальных условий. Во втором приближении появляются гармоники высших порядков.

Первое приближение дает ту же качественную картину, что и второе, которое вносит поправки к численному значению фазы и учитывает гармоники высших порядков, пропорциональные малому параметру.

Из решения видно, что в случае свободного гироскопа под действием импульса, приложенного к внутреннему кольцу, гироскоп будет уходить по углу прецессии со скоростью, пропорциональной квадрату амплитуды нутационных колебаний, если рамки кардановых колец не перпендикулярны. Выражение угловой скорости вращения $\dot{\alpha}_{\text{ср}}$ совпадает с известными выражениями угловой скорости [2], [3], [5], [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.
2. K. Magnus, Beiträge zur Dynamik des kräftefreien, kardanisch gelagerten Kreisels, Zs. angew. Math. und Mech., 35, 1/2, 1955, 23—34.
3. R. Goodstein, A perturbation solution of the equations of motion of a gyroscope, J. Appl. Mech., ser. E, 26, 3, 1959.
4. B. T. Plymale, R. Goodstein, Nutation of a Free Gyro Subjected to an Impulse, J. Appl. Mech., IX, 22, 3, 1955.
5. В. А. Павлов, О нутационных колебаниях гироскопа в кардановом подвесе и их влиянии на его систематический уход от заданного направления, Вопр. прикл. гироск., 1, 1958.
6. Д. С. Пельпор, Свободное движение гироскопа, заключенного в карданов подвесе, НДВШ, Машин. и прибор., 3, 1958.

Поступила 8. II 1961 г.
Киев