Применение метода усреднения для исследования колебаний, возбуждаемых мгновенными импульсами, в автоколебательных системах 2-го порядка с малым параметром

А. М. Самойленко

1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = \varepsilon \cdot \left[f\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \cdot \delta\,(x - x_0) + f_1\left(x, \frac{dx}{dt}\right) \right], \tag{1}$$

где ε — малый параметр, $\delta\,(x)$ — «несобственная функция», определяемая соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-0}^{+0} \delta\,(x)\,dx = 1, \\ &\delta\,(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Совершив в уравнении (1) замену переменных $x = a \sin \varphi$, $\frac{dx}{dt} = a\omega \cos \varphi$, где $\varphi = \omega t + \theta$, приведем уравнение (1) к стандартному виду:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot f\,(a \sin \varphi, a\omega \cos \varphi) \cos \varphi \delta\,(a \sin \varphi - x_0) + \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{\omega} f_1\,(a \sin \varphi, a\omega \cos \varphi) \cos \varphi, \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\varepsilon}{\omega a} f\,(a \sin \varphi, a\omega \cos \varphi) \sin \varphi \delta\,(a \sin \varphi - x_0) - \\ &\quad - \frac{\varepsilon}{\omega a} f_1\,(a \sin \varphi, a\omega \cos \varphi) \sin \varphi. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Используя свойства «несобственной функции»

$$\left.\begin{aligned} & f(x)\,\delta(x-x_0)=f(x_0)\,\delta(x-x_0),\\ & \delta(f(x))=\sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}, \quad \text{где} \quad f(x_i)=0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

преобразуем уравнения (3). Имеем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \pm\frac{\varepsilon\sqrt{a^2-x_0^2}}{\omega a} f\left(x_0, \pm\,\omega\sqrt{a^2-x_0^2}\right)\delta(a\sin\varphi-x_0)+\\ &\qquad +\frac{\varepsilon}{\omega} f_1(a\sin\varphi, a\omega\cos\varphi)\cos\varphi,\\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\varepsilon x_0}{\omega a^2}\cdot f\left(x_0, \pm\,\omega\sqrt{a^2-x_0^2}\right)\delta(a\sin\varphi-x_0)-\\ &\qquad -\frac{\varepsilon}{\omega a} f_1(a\sin\varphi, a\omega\cos\varphi)\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где из ($\pm$) знак ($-$) берется для φ, изменяющегося в интервалах

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right), \quad \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{3}{2}\pi\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}+2\pi, \frac{3}{2}\pi+2\pi\right)\ldots$$

Для определенности дальнейшего изложения будем считать, что $x_0 > 0$. Так как $\delta(a\sin\varphi-x_0)$ отлична от нуля лишь при

$$a > x_0, \tag{6}$$

то исследование решений системы (5) представляет интерес лишь при выполнении условия (6). Поэтому будем исследовать в дальнейшем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \pm\frac{\varepsilon}{\omega} f\left(x_0, \pm\,\omega\sqrt{a^2-x_0^2}\right)\cdot\frac{\sqrt{a^2-x_0^2}}{a}\,\delta(a\sin\varphi-x_0)+\\ &\qquad +\frac{\varepsilon}{\omega} f_1(a\sin\varphi, a\omega\cos\varphi)\cos\varphi,\\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\varepsilon x_0}{\omega a^2} f\left(x_0, \pm\,\omega\sqrt{a^2-x_0^2}\right)\delta(a\sin\varphi-x_0)-\\ &\qquad -\frac{\varepsilon}{\omega a} f_1(a\sin\varphi, a\omega\cos\varphi)\sin\varphi,\\ & a > x_0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

2. Для дальнейших преобразований системы (7) необходимо знать корни уравнения

$$a\sin\varphi = x_0, \tag{8}$$

где a и φ определяются из уравнений (7).

Если $\varphi_a^{(1)}$ и $\varphi_a^{(2)}$ — корни уравнения (8), лежащие соответственно в интервалах $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, то его корнями будут также $\varphi_a^{(1)}+2k\pi$, $\varphi_a^{(2)}+2k\pi$, $k=\pm 1, \pm 2, \ldots$

Согласно (4), имеем:

$$\delta(a\sin\varphi-x_0)=\sum_{-\infty<k<\infty}\frac{\delta(\varphi-\varphi_a^{(1)}-2k\pi)+\delta(\varphi-\varphi_a^{(2)}-2k\pi)}{\sqrt{a^2-x_0^2}}$$

Система (7) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon}{\omega a}\left\{f\left(x_0, \omega\sqrt{a^2-x_0^2}\right)\left[\sum_k \delta\left(\varphi-\varphi_a^{(1)}-2k\pi\right)\right]-\right. \\
&\quad\left.-f\left(x_0, -\omega\sqrt{a^2-x_0^2}\right)\left[\sum_k \delta\left(\varphi-\varphi_a^{(2)}-2k\pi\right)\right]\right\}+ \\
&\quad+\frac{\varepsilon}{\omega} f_1(a\sin\varphi, a\omega\cos\varphi)\cos\varphi, \\
\frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\varepsilon x_0}{\omega a^2\sqrt{a^2-x_0^2}}\left\{f\left(x_0, \omega\sqrt{a^2-x_0^2}\right)\left[\sum_k \delta\left(\varphi-\varphi_a^{(1)}-2k\pi\right)\right]+\right. \\
&\quad\left.+f\left(x_0, -\omega\sqrt{a^2-x_0^2}\right)\left[\sum_k \delta\left(\varphi-\varphi_a^{(2)}-2k\pi\right)\right]\right\}- \\
&\quad-\frac{\varepsilon}{\omega a} f_1(a\sin\varphi, a\omega\cos\varphi)\sin\varphi.
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Используя равенство

$$\sum_{-\infty<k<\infty} \delta(x+2k\pi) = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\cos kx\right\},$$

преобразовываем систему (9) к виду:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon}{\pi\omega a}\left\{f\left(x_0, \omega\sqrt{a^2-x_0^2}\right)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\cos k\left(\varphi-\varphi_a^{(1)}\right)\right]-\right. \\
&\quad\left.-f\left(x_0, -\omega\sqrt{a^2-x_0^2}\right)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\cos k\left(\varphi-\varphi_a^{(2)}\right)\right]\right\}+ \\
&\quad+\frac{\varepsilon}{\omega} f_1(a\sin\varphi, a\omega\cos\varphi)\cos\varphi, \\
\frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\varepsilon x_0}{\pi\omega a^2\sqrt{a^2-x_0^2}}\left\{f\left(x_0, \omega\sqrt{a^2-x_0^2}\right)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}\cos k\left(\varphi-\right.\right.\right. \\
&\quad\left.\left.-\varphi_a^{(1)}\right)\right]+f\left(x_0, -\omega\sqrt{a^2-x_0^2}\right)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\cos k\left(\varphi-\varphi_a^{(2)}\right)\right]\right\}- \\
&\quad-\frac{\varepsilon}{\omega a} f_1(a\sin\varphi, a\omega\cos\varphi)\sin\varphi.
\end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Из системы (10) получаем уравнения 1-го приближения в виде

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon}{2\pi\omega a}\left[f\left(x_0, \omega\sqrt{a^2-x_0^2}\right)-f\left(x_0, -\omega\sqrt{a^2-x_0^2}\right)\right]+\frac{\varepsilon}{\omega}a_{01}(a), \\
\frac{d\theta}{dt} &= -\frac{\varepsilon x_0}{2\pi\omega a^2\sqrt{a^2-x_0^2}}\left[f\left(x_0, \omega\sqrt{a^2-x_0^2}\right)+f\left(x_0,\right.\right. \\
&\quad\left.\left.-\omega\sqrt{a^2-x_0^2}\right)\right]-\frac{\varepsilon}{\omega a}a_{01}^{1}(a),
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

где

$$a_{01}(a)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_1(a\sin\varphi,\ a\omega\cos\varphi)\cos\varphi d\varphi,$$

$$a_{01}^1(a)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_1(a\sin\varphi,\ a\omega\cos\varphi)\sin\varphi\, d\varphi.$$

Уравнения I-го приближения дают осредненную картину колебаний, но не обнаруживают явлений, возникающих благодаря наличию мгновенного импульса.

3. Для обнаружения этих явлений необходимо обратиться к рассмотрению по крайней мере улучшенного I-го приближения:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{a}&=a+\frac{\varepsilon}{\pi\omega^2 a}\left\{f(x_0,\omega\sqrt{a^2-x_0^2})\cdot\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k(\varphi-\varphi_a^{(1)})}{k}\right]-\right.\\
&\left.-f(x_0,-\omega\sqrt{a^2-x_0^2})\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k(\varphi-\varphi_a^{(2)})}{k}\right]\right\}+\\
&+\frac{\varepsilon}{\omega^2}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k1}\sin k\varphi-b_{k1}\cos k\varphi}{k}\right],\\
\bar{\theta}&=\theta-\frac{\varepsilon x_0}{\pi\sqrt{a^2-x_0^2}\cdot a^2\omega^2}\left\{f(x_0,\omega\sqrt{a^2-x_0^2})\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k(\varphi-\varphi_a^{(1)})}{k}\right]+\right.\\
&\left.+f(x_0,-\omega\sqrt{a^2-x_0^2})\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k(\varphi-\varphi_a^{(2)})}{k}\right]\right\}-\\
&-\frac{\varepsilon}{\omega^2 a}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{k1}^1\sin k\varphi-b_{k1}^1\cos k\varphi}{k}\right],
\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

где a_{k1}, b_{k1}, a_{k1}^1, b_{k1}^1 $(k=1,2,\ldots)$ — коэффициенты Фурье функций $f_1(a\sin\varphi,\ a\omega\cos\varphi)\cos\varphi$, $f_1(a\sin\varphi,\ a\omega\cos\varphi)\sin\varphi$; a и θ — решения уравнений (11).

Так как сумма $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k\psi}{k}$ представляет собой ряд Фурье функции $\frac{\pi-\psi}{2}$, $0<\psi<2\pi$, то формулы (12) определяют $\bar{a}$ и $\bar{\varphi}$ разрывными функциями, с точками разрыва $\varphi-\varphi_a^{(1)}=2k\pi$, $\varphi-\varphi_a^{(2)}=2k\pi$, $k=0,1,2\ldots$

Таким образом, в колебаниях, амплитуда и фаза которых определяется из уравнений улучшенного I-го приближения, действие мгновенного импульса проявляется в скачкообразном изменении как амплитуды, так и фазы колебаний.

Кроме этого, непосредственные подсчеты разностей

$$\Delta x^{(1)}=x(\varphi_a^{(1)}+0)-x(\varphi_a^{(1)}-0),\quad \Delta x^{(2)}=x(\varphi_a^{(2)}+0)-x(\varphi_a^{2}-0),$$

$$\Delta v^{(1)}=v(\varphi_a^{(1)}+0)-v(\varphi_a^{(1)}-0),\quad \Delta v^{(2)}=v(\varphi_a^{(2)}+0)-v(\varphi_a^{(2)}-0)$$

согласно формулам (12) показывают, что с точностью до величин порядка

ε включительно имеем:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x^{(1)} = \Delta x^{(2)} = 0, \qquad \Delta v^{(1)} = \varepsilon \frac{f\left(x_0, \omega \sqrt{a^2 - x_0^2}\right)}{\omega \sqrt{a^2 - x_0^2}}, \\ \Delta v^{(2)} = \varepsilon \frac{f\left(x_0, -\omega \sqrt{a^2 - x_0^2}\right)}{\omega \sqrt{a^2 - x_0^2}}. \end{aligned}\right| \tag{13}$$

Следовательно, колебания, определяемые согласно (12), непрерывны, их скорость изменяется скачкообразно со скачками в момент импульса, величина которых определяется формулами (13).

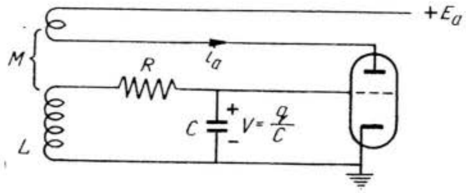

Рис. 1.

4. Отыскание стационарных динамических режимов связано с отысканием положительных корней уравнения стационарных амплитуд:

$$\frac{1}{2\pi a}\left[f\left(x_0, \omega \sqrt{a^2 - x_0^2}\right) - f\left(x_0, -\omega \sqrt{a^2 - x_0^2}\right)\right] + a_{01}(a) = 0. \tag{14}$$

Пусть a_0 — стационарная амплитуда, $\varphi = [\omega + \varepsilon B(a_0)]t + \varphi_0$ — соответствующая ей полная фаза, тогда $\bar{a}(a_0, t)$ — периодическая разрывная функция периода

$$T = \frac{2\pi}{\omega + \varepsilon B(a_0)}. \tag{15}$$

Функции $x(t, a_0)$ и $v(t, a_0)$, определенные согласно (12), будут тогда периодическими функциями периода T, причем $v(t, a_0)$ будет периодической разрывной функцией с точками разрыва, совпадающими с корнями уравнения

$$a_0 \sin\{[\omega + \varepsilon B(a_0)]t + \varphi_0\} = x_0.$$

5. В качестве примера исследуем колебания генератора в случае Γ-характеристики [2].

При некоторой идеализации колебаний лампового генератора в случае, когда анодный ток i_a (рис. 1) большую часть времени равен либо нулю (лампа заперта), либо току насыщения I_s, колебания в ламповом генераторе можно характеризовать уравнением

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = M\boldsymbol{I}_s\dot{q}\delta(q). \tag{16}$$

Физическая трактовка правой части уравнения (16) следующая: когда v переходит через 0 в положительном направлении, анодный ток за время τ, очень мало отличающееся от нуля, переходит от значения 0 к значению $\boldsymbol{I}_s$, одновременно э. д. с индукции $M\frac{di_a}{dt} = M\boldsymbol{I}_s\dot{q}\delta(q)$ очень быстро меняется от значения 0, которое оно имело прежде когда $i_a = 0$, до некоторого очень большого значения, а затем, когда $i_a = \boldsymbol{I}$, примерно также быстро спадает до нуля; когда v переходит через 0 в отрицательном направлении, анодный ток чрезвычайно быстро изменяется от $\boldsymbol{I}_s$ до 0, а э. д. с. индукции — от 0 до очень большого отрицательного значения и от него — опять к нулю.

Уравнение (16) в предположении, что $\frac{1}{L}$ мало, принадлежит к исследуемому виду уравнений:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = \frac{1}{L}\left\{MI_s\frac{dq}{dt}\delta(q) - R\frac{dq}{dt}\right\}. \tag{17}$$

Подстановкой $q = a\sin\varphi$, $\dot{q} = a\sqrt{\frac{1}{LC}}\cos\varphi$, [где $\varphi = \sqrt{\frac{1}{LC}}t + \theta$, приводим (17) к уравнениям стандартного вида:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{1}{L}\{MI_s a\cos^2\varphi\delta(a\sin\varphi) - Ra\cos^2\varphi\}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\frac{1}{La}\{M'_s a\cos\varphi\delta(a\sin\varphi) - Ra\cos\varphi\}\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Эквивалентная (18) система (10) имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{MI_s}{\pi L}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\cos k\varphi + \sum_{k=1}^{\infty}\cos k(\varphi - \pi)\right\} - \frac{Ra}{L}\cdot\frac{1+\cos 2\varphi}{2}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{R}{2L}\sin 2\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Уравнения 1-го приближения

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{MI_s}{\pi L} - \frac{Ra}{2L}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Решение в 1-м приближении определяется формулой

$$q = k\cdot e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t + \varphi_0\right) + \frac{2MI_s}{\pi R}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t + \varphi_0\right),$$

где k — постоянная. Система имеет единственный стационарный режим

$$q(t, a_0) = \frac{2MI_s}{\pi R}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}t + \varphi_0\right).$$

Улучшенное 1-е приближение системы (19):

$$\bar{a} = a + \frac{MI_s}{\pi}\sqrt{\frac{C}{L}}\left\{\sum_{k=1}\frac{\sin k\varphi}{k} + \sum_{k=1}\frac{\sin k(\varphi - \pi)}{k}\right\} -$$

$$-\frac{R}{4}\sqrt{\frac{C}{L}}\,a\cdot\sin 2\varphi,$$

$$\bar{\theta} = \varphi_0 - \frac{R}{4}\sqrt{\frac{C}{L}}\cos\varphi,$$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{LC}}t + \varphi_0,$$

где $a(t)$ — решение 1-го уравнения (20).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., 1958.
2. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, М., 1959.

Поступила 4. IV 1961 г.
Киев