О сходимости итерационных процессов

В. Е. Шаманский

Одним из основных методов исследования линейного уравнения

$$Ax = f \tag{1}$$

в гильбертовом пространстве H, где A — ограниченный оператор, отображающий H в себя, является итерационный метод. Решение уравнения (1) ищется в виде последовательности приближенных решений, которые строятся по формуле

$$x_n = (E - A)x_{n-1} + f. \tag{2}$$

Итерационный процесс (2) служит часто основой для построения других более быстро сходящихся итерационных процессов. Для случая операторов A, все точки спектра которых, отличные от нулевой, суть собственные значения, известна следующая теорема о сходимости процесса [1].

Теорема 1. *Для сходимости итерационного процесса* (2) *при любых $x_0 \in H$, $f \in H$ необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения λ оператора A удовлетворяли неравенству $|1 - \lambda| < 1$.*

Докажем здесь более точную теорему о сходимости итерационного процесса (2), используя то обстоятельство, что уравнение (1) разрешимо не при любом $f \in H$.

Теорема 2. *Если уравнение $Ax = f$ разрешимо (может и неединственным образом), то процесс простой итерации* (2) *сходится при любом начальном элементе $x_0 \in H$, если все собственные значения оператора A, кроме нулевого, удовлетворяют неравенству $|1 - \lambda| < 1$. Если уравнение $Ax = f$ неразрешимо, то процесс простой итерации расходится при всех f и $x_0 \in H$.*

Доказательство. Доказательство следует провести только для случая, когда уравнение $Ax = f$ имеет неединственное решение или неразрешимо, так как в случае единственного решения ответ дается теоремой 1. Если уравнение (1) разрешимо, то f ортогонально всем решениям уравнения $A^*\tilde{x} = 0$, где A^* — сопряженный оператор, то есть $(f, \tilde{x}) = 0$ (рассматривается нормально разрешимый оператор A). Решения уравнения $A^*\tilde{x} = 0$ образуют подпространство H_0 пространства H. Обозначим через H_1 ортогональное дополнение подпространства H_0. Будем рассматривать общий случай произвольного $f \in H$. Тогда f можно разложить на две составляющие: $f = \tilde{f} + \tilde{\tilde{f}}$, где $\tilde{f} \in H_0$, а $\tilde{\tilde{f}} \in H_1$. Из (2) следует, что n-е приближение x_n представимо в виде

$$x_n = x_0 - P_{n-1}(A)(Ax_0 - f), \tag{3}$$

где $P_{n-1}(A) = (E - A)^{n-1} + (E - A)^{n-2} + \ldots + E - A + E.$

Разложим x_0 также на две составляющие, принадлежащие соответственно подпространствам H_0 и H_1: $x_0 = \widetilde{x}_0 + \bar{x}_0$. Тогда из (3) по лучим:

$$x_n = \widetilde{x}_0 + \bar{x}_0 - P_{n-1}(A)\,[A\,(\widetilde{x}_0 + \bar{x}_0) - \widetilde{f} - \bar{f}].$$

Введем элемент $z_n = x_n - \widetilde{x}_0 + P_{n-1}(A)(A\widetilde{x}_0 - \widetilde{f})$. Элементы z_n вычисляются с помощью итерационного процесса:

$$z_n = \bar{x}_0 - P_{n-1}(A)(A\bar{x}_0 - f). \tag{4}$$

Элемент $P_{n-1}(A)\,(A\bar{x}_0 - \bar{f})$ принадлежит подпространству H_1. Действительно,

$$(P_{n-1}(A)(A\bar{x}_0 - \bar{f}), \widetilde{x}) = (P_{n-1}(A)\ A\bar{x}_0, \widetilde{x}) - (\bar{f}, \widetilde{x}) =$$
$$= (\bar{x}_0, A^*P_{n-1}(A^*)\widetilde{x}) = (\bar{x}_0, A^*\widetilde{x}) = 0.$$

Поэтому итерационный процесс можно рассматривать на подпространстве H_1. Уравнение $A\bar{x} = \bar{f}$ имеет единственное решение $\bar{x}$ на подпространстве H_1, и все собственные значения оператора A удовлетворяют условию теоремы 1 на этом подпространстве. Поэтому итерационный процесс (4) сходится к решению $\bar{x}$, то есть $z_n \to \bar{x}$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что

$$x_n \to \widetilde{x}_0 + \bar{x} - \lim_{n\to\infty} P_{n-1}(A)\,(A\widetilde{x}_0 - \widetilde{f}), \tag{5}$$

если $\lim\limits_{n\to\infty} P_{n-1}(A)\,(A\widetilde{x}_0 - \widetilde{f})$ существует.

Рассмотрим подробнее выражение $P_{n-1}(A)\,(A\widetilde{x}_0 - \widetilde{f})$. Введем подпространство H_0^* элементов, являющихся одновременно решениями уравнений $A\widetilde{x}^* = 0$, $A^*\widetilde{x}^* = 0$, а через H_1^* обозначим ортогональное подпространство. Тогда $\widetilde{x}_0 = \widetilde{x}_0^* + \bar{x}_0^*$, где $\widetilde{x}_0^* \in H_0^*$, а $\bar{x}_0^* \in H_1^*$. Поскольку $A\widetilde{x}_0 = A\bar{x}_0^*$, то $\lim\limits_{n\to\infty}[\bar{x}_0^* - P_{n-1}(A)\,A\widetilde{x}_0] = 0$, так как уравнение $A\bar{x}^* = 0$ на подпространстве H_1^* имеет только нулевое решение. Поэтому $P_{n-1}(A)A\widetilde{x}_0 \to \bar{x}_0^*$ при $n \to \infty$.

Таким образом, вместо (5) можно написать следующее:

$$x_n \to \widetilde{x}_0^* + \bar{x} + \lim_{n\to\infty} P_{n-1}(A)\widetilde{f}, \tag{6}$$

если $\lim\limits_{n\to\infty} P_{n-1}(A)\widetilde{f}$ существует. В случае разрешимости уравнения $Ax = f$ элемент $\widetilde{f}$ равен нулю, и из (6) получаем: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \widetilde{x}_0^* + \bar{x}$. Если уравнение (1) неразрешимо, то разложим $\widetilde{f}$ на две составляющие $\widetilde{f} = \widetilde{f}^* + \bar{f}^*$, где $\widetilde{f}^* \in H_0^*$, а $\bar{f}^* \in H_1^*$. Тогда $P_{n-1}(A)\widetilde{f} = P_{n-1}(A)\widetilde{f}^* + P_{n-1}(A)\bar{f}^* = n\widetilde{f}^* + P_{n-1}(A)\bar{f}^*$. Покажем, что элемент $P_{n-1}(A)\bar{f}^* \in H_1^*$: $(P_{n-1}(A)\bar{f}^*, \widetilde{x}) = (\bar{f}^*, P_{n-1}(A^*)\widetilde{x}^*) = 0$. Поэтому, если проекция $\widetilde{f}$ на подпространство H_0^* отлична от нуля, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_{n-1}(A)\widetilde{f} = \infty$, так как элементы $n\widetilde{f}^*$ и $P_{n-1}(A)\bar{f}^*$ принадлежат ортогональным подпространствам. Далее,

$$(P_{n-1}(A)\bar{f}^*, \bar{f}^*) = (\bar{f}^*, P_{n-1}(A^*)\bar{f}^*) = n(\bar{f}^*, \bar{f}^*).$$

Отсюда

$$\| P_{n-1}(A)\bar{f}^* \| \geq n \| \bar{f}^* \|,$$

то есть, если $\bar{f}^* \neq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} P_{n-1}(A)\bar{f}^* = \infty$. Следовательно, в любом случае $\lim\limits_{n\to\infty} P_{n-1}(A)\widetilde{f} = 0$.

Теорема доказана. Одновременно установлен следующий факт.

Теорема 3. *Если последовательность элементов x_n, определяемая формулой (2), сходится, то она сходится к элементу $\widetilde{x}_0^* + \bar{x}$, где $\widetilde{x}_0^*$ — проекция начального приближения x_0 на подпространство общих решений уравнений $Ay = 0$, $A^*z = 0$, а $\bar{x}$ — решение уравнения $Ax = f$, ортогональное всем решениям уравнения $A^*z = 0$.*

Результаты, подобные изложенным выше, для случая уравнений с самосопряженным оператором имеются в работах [2], [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. В. Канторович и Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959.
2. В. М. Фридман, ДАН СССР, т. 128, № 3, 1959.
3. М. А. Красносельский, УМН, т. 15, в. 3, 1960.

Поступила 21. XI 1960 г.
Киев