Об одном свойстве почти периодических полиномов

В. К. Дзядык

Определение. Назовем почти периодическим полиномом функцию вида

$$T(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos \lambda_k x + \beta_k \sin \mu_k x), \tag{1}$$

где α_k, β_k, λ_k и μ_k — любые действительные числа.

В этой заметке мы докажем, что имеет место следующая теорема.

Теорема. *Если $T(x)$ — произвольный не тождественно постоянный почти периодический полином вида* (1), *где n — любое натуральное число, то тогда среди чисел*

$$T'(0),\ T''(0), \ldots,\ T^{(2n+2)}(0) \tag{2}$$

найдется по крайней мере одно положительное число и по крайней мере одно отрицательное число.

Эта теорема служит обобщением аналогичного результата, доказанного ранее автором [1] при помощи методов теории функций для случая, когда $T(x)$ — обыкновенный тригонометрический полином порядка $\leqslant n$.

Для доказательства теоремы нам потребуется следующая лемма [см. [2], стр. 93].

Лемма. *Все миноры определителя Вандермонда вида*

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^n & x_2^n & \ldots & x_n^n \end{vmatrix},$$

где $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, *являются положительными.*

Доказательство. Представив $T(x)$ в виде суммы

$$T(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos \lambda_k x + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \sin \mu_k x = T_2(x) + T_1(x),$$

легко усматриваем, что теорему достаточно доказать только для нечетных полиномов вида

$$T_1(x) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \sin \mu_k x,$$

то есть доказать, что если $T_1(x) \not\equiv 0$, то тогда числа

$$T'(0),\ T'''(0), \ldots,\ T^{(2n+1)}(0)$$

не могут быть одновременно все неотрицательными или все неположительными. Действительно, из справедливости теоремы для нечетных полиномов немедленно будет вытекать, что если $T_2'(x) \not\equiv 0$, то тогда числа

$$T''(0) = T_2''(0),\ T^{(\mathrm{IV})}(0) = T_2^{(\mathrm{IV})}(0), \ldots, T^{(2n+2)}(0) = T_2^{(2n+2)}(0),$$

будучи производными порядков $1, 3, 5, \ldots, 2n+1$ для нечетного полинома $T_2'(x) \not\equiv 0$, также не могут быть одновременно все неотрицательными или все неположительными.

Итак, ограничимся случаем, когда

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \sin \mu_k x,$$

и будем, очевидно, без потери общности считать, что

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n. \tag{3}$$

Учитывая, что коэффициенты β_k полинома $T(x)$ удовлетворяют системе уравнений

$$T'(0) = -\sum_{k=1}^{n} \beta_k \mu_k,$$

$$T'''(0) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mu_k^3,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$T^{(2n+1)}(0) = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \beta_k \mu_k^{2n+1}$$

в силу теоремы Кронеккера — Капелли находим

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & T'(0) \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \ldots & \mu_n^2 & -T'''(0) \\ \mu_1^4 & \mu_2^4 & \ldots & \mu_n^4 & T^{\mathrm{IV}}(0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mu_1^{2n} & \mu_2^{2n} & \ldots & \mu_n^{2n} & (-1)^n T^{(2n+1)}(0) \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{n} T^{(2i+1)}(0)\, M_{2i+1} = 0, \tag{4}$$

где M_{2i+1} — миноры элементов $(-1)^i T^{(2i+1)}(0)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Так как в силу леммы все числа M_{2i+1} являются строго положительными, то из равенства (4) вытекает, что среди чисел $T^{(2i+1)}(0)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ обязательно существуют числа разных знаков*.

---

* Одновременно равняться нулю все числа $T^{(2i+1)}(0)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ не могут в силу того обстоятельства, что, по предположению, $T(x) \neq \mathrm{const}$.

Этим теорема доказана.

Замечания. 1. Пример полинома

$$T(x) = \left(\sin^2 \frac{x}{2}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cos kx,$$

у которого

$$T'(0) = T''(0) = \ldots = T^{(2n-1)}(0) = 0, \ T^{(2n)}(0) \neq 0 \text{ и } T^{(2n+1)}(0) = 0,$$

показывает, что теорема теряет силу, если в ней в соотношении (2) вместо $2n+2$ взять $2n+1$ чисел

$$T'(0), \ T''(0), \ldots, \ T^{(2n+1)}(0).$$

2. Пример полинома

$$T(x) = \sin x + \frac{1}{4} \cos 2x,$$

для которого

$$T'\left(\frac{\pi}{2}\right) = T''\left(\frac{\pi}{2}\right) = T'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

показывает, что теорема теряет силу, если в ней производные рассматривать не в точке $x = 0$, а в произвольной точке x_0.

Тем не менее из доказанной теоремы в силу замены $x = x_0 + t$ вытекает следствие.

Следствие. *Если $T(x)$ — произвольный не тождественно постоянный почти периодический полином вида*

$$T(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos \lambda_k x + \beta_k \sin \lambda_k x), \tag{1'}$$

где α_k, β_k и λ_k — любые действительные числа и n — какое-либо натуральное число, то тогда какова бы ни была точка $x_0 \in (-\infty, \infty)$, среди чисел

$$T'(x_0), \ T''(x_0), \ldots, \ T^{(2n+2)}(x_0) \tag{2'}$$

найдется по крайней мере одно положительное число и по крайней мере одно отрицательное число.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Дзядык, К вопросу о наилучшем приближении абсолютно монотонных и некоторых других функций в метрике L при помощи тригонометрических полиномов, Изв. АН СССР, сер. математ., т. 25, № 2, 1961, 173—238.

2. Ф. Р. Гантмахер и М. Г. Крейн, Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, 2 изд., Гостехиздат, 1950.

Поступила 30. IV 1961 г.

Киев