Об аналитических свойствах вкладов от диаграмм с пятью внешними импульсами

И. И. Костырко

Исследование аналитических свойств матричных элементов в рамках теории возмущений представляет значительный интерес. Этому вопросу уже посвящен ряд важных работ [1—3].

Значение этих работ состоит в том, что в них на базе исследования матричных элементов по теории возмущений дается попытка найти разумный подход для исследования аналитических свойств без теории возмущений, но с учетом унитарности. В последнее время в литературе обсуждался вопрос об аналитических свойствах матричных элементов для неупругих процессов [4]. Так, например, М. Ф. Фавлер, П. В. Ландсгоф и Р. В. Ларднер показали, что амплитуда неупругого процесса, соответствующего диаграмме рис. 1, не удовлетворяет двойным дисперсионным соотношениям. Таким образом, естественно попытаться на первых порах установить для амплитуды этого процесса хотя бы обычные дисперсионные соотношения.

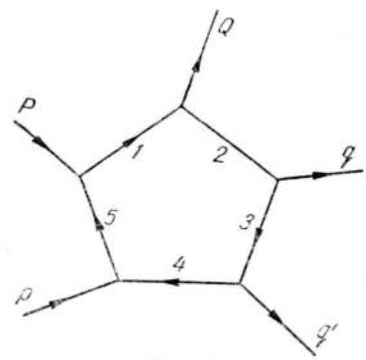

Рис. 1.

Такая задача представляет двойной интерес:

с одной стороны, интересно получить эти дисперсионные соотношения методами теории возмущений, так как на пути доказательства дисперсионных соотношений на основе аксиоматики [3] встретились непреодолимые трудности;

с другой стороны, Р. В. Ларднер в работе [5] для вывода представления Мандельштама в трехчастичном приближении в качестве гипотезы предполагал выполнимость дисперсионных соотношений по одной переменной.

В настоящей заметке получены достаточные условия выполнимости дисперсионных соотношений по энергии для случая неупругих процессов, соответствующих диаграмме с пятью внешними импульсами и одним замкнутым контуром.

Для простейших диаграмм с четырьмя внешними импульсами в статье Тейлора [6] были найдены условия существования дисперсионных соотношений по энергии. Ниже мы будем пользоваться его методом.

Пусть вклад от некоторой диаграммы как функция энергии имеет вид

$$M_F(\omega, \Delta^2) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int \prod_{i=1}^{n} dx_i \, \delta\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1\right) [A(x) + B(x)\omega + i\varepsilon]^{n-2\alpha}, \tag{1}$$

где $A(x)$, $B(x)$ — некоторые функции параметров Фейнмана, α — число независимых внутренних импульсов.

Построим запаздывающую амплитуду, заменяя ε на $\varepsilon(B)$, т. е. знаком $B(x)$ из уравнения (1), а также опережающую амплитуду, заменяя ε на $-\varepsilon(B)$.

Достаточными условиями того, чтобы запаздывающая амплитуда $M_r(\omega, \Delta^2)$ имела аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость и опережающая амплитуда $M_a(\omega, \Delta^2)$ — соответственно в нижнюю, является необращение в нуль $A(x)$ и $B(x)$ одновременно в области интегрирования. Эти условия можно сформулировать в виде леммы.

Лемма 1. *Если существует положительное число a такое, что $|A(x)| > a$ для всех x, при которых $B(x) = 0$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$, причем a не зависит от x, то запаздывающая амплитуда имеет аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость (аналогично опережающая амплитуда имеет аналитическое продолжение в нижнюю полуплоскость).*

Найдем, при каких ограничениях на инварианты процесса удовлетворяется лемма 1 для диаграмм с пятью внешними импульсами и одним замкнутым контуром. Массы частиц, участвующих в процессе, положим равными m.

Вклад от диаграммы рис. 1 можно записать в виде [2]

$$M_F = \text{const} \int \frac{\delta\left(1-\sum_{i=1}^{5} x_i\right)\prod_{i=1}^{5} dx_i}{U^2(x)\{V(x)-i\varepsilon\}^3}. \tag{2}$$

В нашем случае

$$U(x) = \sum_{i=1}^{5} x_i = 1, \tag{3}$$

$$V(x) = m^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1) +$$
$$+ 2(Ppx_1x_3 + Qqx_1x_4 - pq'x_2x_4 - PQx_2x_5 + qq'x_3x_5). \tag{4}$$

Для того чтобы представить (4) в виде

$$V(x) = [A(x) + B(x)\omega + i\varepsilon], \tag{5}$$

воспользуемся кинематикой Г. Р. Скритона [7]:

$$P = (\sqrt{m^2 + \Delta^2}, 0, 0, \Delta),\ Q = (\sqrt{m^2 + \Delta^2}, 0, 0, -\Delta),$$
$$p = (\omega, \bar{p}), \qquad q = (\nu\omega, \bar{q}), \tag{6}$$
$$q' = (\nu'\omega, \bar{q}').$$

Законы сохранения энергии и импульса частиц учитываются уравнениями

$$\nu + \nu' = 1,\ \bar{q} + \bar{q}' = \bar{p} + 2\bar{\Delta}. \tag{7}$$

Из векторов p, q и q' возможно образовать векторы ξ и ξ' с нулевой энергетической компонентой:

$$\xi = \nu p - q,\ \xi' = \nu' p - q'. \tag{8}$$

Учитывая законы сохранения, имеем

$$\bar{\xi} + \bar{\xi}' + 2\bar{\Delta} = 0.$$

Выберем лоренцовскую систему координат так, чтобы

$$\bar{\xi} = (0, -d, -(\Delta + c)),\ \bar{\xi}' = (0, d, -(\Delta - c)). \tag{9}$$

Если взять векторы p, q, q' на массовой поверхности, то их можно выразить однозначно через Δ, c, d, ν, ω.

Используя (6), (8) и (9), получаем

$$p_1 = \lambda(\omega) = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}, \qquad \varepsilon = \sqrt{m^2 + p_2^2 + p_3^2},$$

где

$$p_2 = \frac{1}{4\nu\nu'\Delta d}\{(\nu - \nu')\Delta[(1 + \nu\nu')m^2 + d^2 + \Delta^2 - c^2] + c[(1 - \nu\nu')m^2 +$$
$$+ d^2 + c^2 - \Delta^2]\},$$

$$p_3 = \frac{-1}{4\nu\nu'\Delta}\{\nu(\Delta - c)^2 + \nu'(\Delta + c)^2 + (1 - \nu\nu')m^2 + d^2\}.$$

Итак, если вместо $\bar{q}$ и $\bar{q}'$ подставить их компоненты, то

$$P = (\sqrt{m^2 + \Delta^2}, 0, 0, \Delta),\ Q = (\sqrt{m^2 + \Delta^2}, 0, 0, -\Delta),$$
$$p = (\omega, \lambda(\omega), p_2, p_3), \quad q = (\nu\omega, \nu\lambda(\omega), \nu p_2 + d, \nu p_3 + \Delta + c), \tag{10}$$

$$q' = (\nu'\omega, \nu'\lambda(\omega), \ \nu' p_2 - d, \nu' p_3 + \Delta - c).$$

Таким образом, M_F зависит от следующих инвариантов: ω, Δ^2, ν, Δc, $d^2 + c^2$, или, другими словами,

$$M_F(Q, q, q', p, P) = M_F(\omega, \Delta^2, \nu, \Delta c, d^2 + c^2). \tag{11}$$

Используя метрику, в которой $p^2 = -m^2$, и учитывая (4), (10), получаем:

$$B(x) = -2\sqrt{m^2 + \Delta^2}(x_3 + \nu x_4) x_1,$$

$$A(x) = m^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1) +$$

$$+ \frac{1}{2\nu(1-\nu)\Delta^2}\{[-3\nu\Delta^4 + 4\nu^2\Delta^4 + \nu\Delta^2(d^2+c^2) - 2\nu\Delta^3 c + \nu\Delta^2 m^2(1-\nu+\nu^2)] \times$$

$$\times x_1x_4 + 4[2\nu\Delta^4(1-\nu) + m^2\nu\Delta^2(1-\nu)]x_2x_5 - [2\Delta^4(2\nu-1)^2 + \Delta^2 m^2(2\nu-1)^2 +$$

$$+ \Delta^2 m^2 + 2\Delta^2(d^2 + c^2) + 4\Delta^3 c(1-2\nu)]x_3x_5 + [4\nu\Delta^2 m^2(1-\nu) + 2\nu^3 m^2\Delta^2 +$$

$$+ 2\nu\Delta^4 + 2\nu\Delta^2(d^2 + c^2) - 4\Delta^3 c\nu]x_2x_4 - [\Delta^2 + c^2 + d^2 + 2\Delta c(1-2\nu) +$$

$$+ (1-\nu+\nu^2)m^2]\Delta^2 x_1x_3\}. \tag{12}$$

Применяя лемму 1, найдем условия, обеспечивающие выполнимость дисперсионных соотношений. $B(x)$ может равняться нулю либо при 1) $x_3 = 0$, $x_4 = 0$; либо при 2) $x_1 = 0$.
В первом случае

$$A(x) = m^2(x_1^2 + x_2^2 + x_5^2 + x_1x_5 + x_1x_2) + 2[2\Delta^2 + m^2]x_2x_5. \tag{13}$$

Как видно из (13), ограничений на инварианты нет.
Во втором случае

$$A(x) = m^2(x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5) +$$

$$+ \frac{1}{2\nu(1-\nu)\Delta^2}\{4[2\nu\Delta^4(1-\nu) + m^2\nu\Delta^2(1-\nu)]x_2x_5 - [2\Delta^4(2\nu-1)^2 +$$

$$+ \Delta^2 m^2(2\nu-1)^2 + \Delta^2 m^2 + 2\Delta^2(d^2 + c^2) + 4\Delta^3 c(1-2\nu)]x_3x_5 +$$

$$+ [4\nu\Delta^2 m^2(1-\nu) + 2\nu^3 m^2\Delta^2 + 2\nu\Delta^4 + 2\nu\Delta^2(d^2 + c^2) - 4\Delta^3 c\nu]x_2x_4\}. \tag{14}$$

Легко убедиться в том, что если выполняются условия

$$\Delta c > 2\Delta^2;$$

$$m^4 > \frac{1}{16\nu^2(1-\nu)^2}[2\Delta^2(2\nu-1)^2 + m^2(2\nu-1)^2 + m^2 + 2(d^2 + c^2) + 4\Delta c(1-2\nu)]^2, \tag{15}$$

то $|A(x)| > a$.

К (15) нужно присоединить еще условия, получаемые перестановкой внешних импульсов при данной энергии падающих частиц. Таких возможных и качественно различных пермутаций три: Qq, qq', Qq'.
Коэффициенты $A(x)$ и $B(x)$ при Qq-пермутации имеют следующий вид:

$$B(x) = -2\sqrt{m^2 + \Delta^2}(x_1x_3 + \nu x_1x_4 - \nu x_2x_5 + \nu' x_3x_5),$$

$$A(x) = m^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1) -$$

$$- \frac{1}{2\nu(1-\nu)}\{\nu(\Delta - c)^2 + (1-\nu)(\Delta + c)^2 + (1-\nu+\nu^2)m^2 + d^2\}x_1x_3 +$$

$$+ \left\{\frac{1}{2\nu(1-\nu)}[\nu(\Delta - c)^2 + (1-\nu)(\Delta + c)^2 + (1-\nu+\nu^2)m^2 + d^2]\nu -\right.$$

$$-\Delta^2-\Delta c\Big\} x_1x_4+\frac{1}{2\nu(1-\nu)\Delta^2}\,[4\nu\Delta^2m^2(1-\nu)+2\nu^3m^2\Delta^2+2\nu\Delta^4+$$

$$+2\nu\Delta^2(d^2+c^2)-4\Delta^3c\nu]\,x_2x_4+\Big\{\frac{1}{2\nu(1-\nu)}\,[\nu(\Delta-c)^2+(1-\nu)(\Delta+c)^2+$$

$$+(1-\nu+\nu^2)m^2+d^2]\,\nu-\Delta^2-\Delta c\Big\}\,x_2x_5+\Big\{\frac{1}{2\nu(1-\nu)}\,[\nu(\Delta-c)^2+$$

$$+(1-\nu)(\Delta+c)^2+(1-\nu+\nu^2)m^2+d^2](1-\nu)-\Delta^2+\Delta c\Big\}\,x_3x_5 \qquad (16)$$

В этом случае $|A(x)|>a$, если выполняются условия

$$\Delta c>2\Delta^2;$$

$$m^4>\frac{1}{\nu^4(1-\nu)^2}\,[\Delta^2+\Delta c]^2; \qquad (17)$$

$$\frac{1}{2}\,[\nu(\Delta-c)^2+(1-\nu)(\Delta+c)^2+(1-\nu+\nu^2)m^2+d^2]>\Delta^2+\Delta c.$$

Коэффициенты $A(x)$, $B(x)$ при qq'-пермутации имеют следующий вид:

$$B(x)=-2\sqrt{m^2+\Delta^2}\,(x_3+\nu' x_4)\,x_1,$$

$$A(x)=m^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)-$$

$$-\frac{1}{2\nu(1-\nu)}\,\{\nu(\Delta-c)^2+(1-\nu)(\Delta+c)^2+(1-\nu+\nu^2)m^2+d^2\}\,x_1x_3+$$

$$+\Big\{\frac{1}{2\nu(1-\nu)}\,[\nu(\Delta-c)^2+(1-\nu)(\Delta+c)^2+(1-\nu+\nu^2)m^2+d^2](1-\nu)-$$

$$-\Delta^2+\Delta c\Big\}\,x_1x_4+\frac{1}{\nu(1-\nu)\Delta^2}\,\{\Delta^2[m^2(1-\nu)+d^2(1-\nu)+\nu c^2+ \qquad (18)$$

$$+\Delta^2(1-\nu)+\Delta c(1-2\nu)]+\Delta c[\Delta^2+\Delta c(1-2\nu)]\}\,x_2x_4+2(m^2+2\Delta^2)x_2x_5+$$

$$+\frac{1}{2\nu(1-\nu)\Delta^2}\,[-2\Delta^4(2\nu-1)^2+\Delta^2m^2(2\nu-1)^2-\Delta^2m^2-2\Delta^2(d^2+c^2)-$$

$$-4\Delta^3c(1-2\nu)]\,x_3x_5.$$

Из (18) находим условия выполнимости дисперсионных соотношений для qq'-пермутационной диаграммы:

$$1-2\nu>0, \qquad (19)$$

$$m^4>\frac{1}{16\nu^2(1-\nu)^2}\,[-2\Delta^2(2\nu-1)^2-m^2(2\nu-1)^2-$$

$$-m^2-2(d^2+c^2)-4\Delta c(1-2\nu)]^2.$$

Наконец, для Qq'-пермутационной диаграммы коэффициенты $A(x)$ и $B(x)$ выражаются следующим образом:

$$B(x)=-2\sqrt{m^2+\Delta^2}\,(x_1x_3+\nu x_3x_5-x_2x_4-\nu' x_2x_5),$$

$$A(x)=m^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)-$$

$$-\frac{1}{2\nu(1-\nu)}\,\{\nu(\Delta-c)^2+(1-\nu)(\Delta+c)^2+(1-\nu+\nu^2)m^2+d^2\}\,x_1x_3+$$

$$+\frac{1}{2\nu(1-\nu)\Delta^2}[-2\Delta^4(2\nu-1)^2-\Delta^2m^2(2\nu-1)^2-\Delta^2m^2-2\Delta^2(d^2+c^2)-$$

$$-4\Delta^3c(1-2\nu)]x_1x_4-\frac{1}{2\nu(1-\nu)}\{\nu(\Delta-c)^2+(1-\nu)(\Delta+c)^2+$$

$$+(1-\nu+\nu^2)m^2+d^2\}x_2x_4+\left\{\frac{1}{2\nu(1-\nu)}[\nu(\Delta-c)^2+(1-\nu)(\Delta+c)^2+\right.$$

$$\left.+(1-\nu+\nu^2)m^2+d^2](1-\nu)-\Delta^2+\Delta c\right\}x_2x_5+\left\{\frac{1}{2\nu(1-\nu)}[\nu(\Delta-c)^2+\right.$$

$$\left.+(1-\nu)(\Delta+c)^2+(1-\nu+\nu^2)m^2+d^2]\nu-\Delta^2-\Delta c\right\}x_3x_5. \qquad (20)$$

Дисперсионные соотношения для Qq'-пермутационной диаграммы в случае, когда $B(x)=0$ вследствие равенства нулю соответствующих x_i $(i=1,2,\ldots,5)$, возможны при следующих условиях:

$$m^4>\frac{1}{16\nu^2(1-\nu)^2}[-2\Delta^2(2\nu-1)^2-m^2(2\nu-1)^2-m^2-$$

$$-2(d^2+c^2)-4\Delta c(1-2\nu)]^2, \qquad (21)$$

$$\Delta c>\Delta^2.$$

В случае, когда $B(x)=0$ вследствие уравнения $x_1x_3+\nu x_3x_5=x_2x_4+\nu'x_2x_5$ при $x_i\neq 0$ $(i=1,2,\ldots,5)$, коэффициент $A(x)$ имеет вид:

$$A(x)=m^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)-$$

$$-\frac{1}{\nu(1-\nu)}\{\nu(\Delta-c)^2+(1-\nu)(\Delta+c)^2+(1-\nu+\nu^2)m^2+d^2\}x_2x_4+$$

$$+\frac{1}{2\nu(1-\nu)}[-\Delta^2+\Delta c]x_2x_5+ \qquad (22)$$

$$+\left\{\frac{1}{\nu(1-\nu)}[\nu(\Delta-c)^2+(1-\nu)(\Delta+c)^2+(1-\nu+\nu^2)m^2+d^2]\nu-\right.$$

$$\left.-\Delta^2-\Delta c\right\}x_3x_5-\frac{1}{2\nu(1-\nu)\Delta^2}[2\Delta^4(2\nu-1)^2+\Delta^2m^2(2\nu-1)^2+$$

$$+\Delta^2m^2+2\Delta^2(d^2+c^2)+4\Delta^3c(1-2\nu)]x_1x_4.$$

Из (22) находим условия положительности $A(x)$:

1) $\Delta c>\Delta^2$;

2) $\frac{1}{1-\nu}[\nu(\Delta-c)^2+(1-\nu)(\Delta+c)^2+(1-\nu+\nu^2)m^2+d^2]>\Delta^2+\Delta c$;

3)
$$\begin{vmatrix} m^2, & \frac{m^2}{2}, & 0, & a \\ \frac{m^2}{2}, & m^2, & \frac{m^2}{2}, & b \\ 0, & \frac{m^2}{2}, & m^2, & \frac{m^2}{2} \\ a, & b, & \frac{m^2}{2}, & m^2 \end{vmatrix}>0, \qquad (23)$$

где

$$a = -\frac{1}{4\nu(1-\nu)}\left[2\Delta^2(2\nu-1)^2 + m^2(2\nu-1)^2 + m^2 + 2(d^2+c^2) + 4\Delta c(1-2\nu)\right],$$

$$b = -\frac{1}{2\nu(1-\nu)}\left\{\nu(\Delta-c)^2 + (1-\nu)(\Delta+c)^2 + (1-\nu+\nu^2)m^2 + d^2\right\}.$$

Неравенство (23) 3)эквивалентно неравенству

$$[5m^4 + 8m^2b - 4m^2a + 16ab - 16b^2 - 12a^2] > 0.$$

Итак, на основе (15), (17), (19), (21), (23) находим ограничения, при которых выполняются дисперсионные соотношения по энергии для диаграмм с пятью внешними импульсами и одним замкнутым контуром:

$$\begin{aligned}
&\Delta c > 2\Delta^2;\\
&1 - 2\nu > 0;\\
&m^4 > a^2;\\
&m^4 > \frac{1}{\nu^4(1-\nu)^2}[\Delta^2 + \Delta c]^2;\\
&-\nu(1-\nu)\,b > \Delta^2 + \Delta c;\\
&[5m^4 + 8m^2b - 4m^2a + 16ab - 16b^2 - 12a^2] > 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

Сопоставление наших результатов с недавними результатами П. В. Ландсгофа и С. В. Траймана [8] показывает, что аналитические свойства вкладов диаграмм по квадрату передаваемого импульса Δ^2 отличаются от аналитических свойств от этих же диаграмм по энергии ω.

Система неравенств (24) не противоречива, что легко проверяется при конкретных величинах инвариантов, удовлетворяющих условиям процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. Symanzik, Prog. Theor. Phys., 20 (1958), 69.
2. N. Nakanishi, Prog. Theor. Phys., 22 (1959), 128—144.
3. А. А. Логунов, А. Н. Тавхалидзе, И. Т. Тодоров, ДАН СССР, 135 (1960), 801—804.
4. M. F. Fowler, P. V. Landshoff, R. W. Lardner, Nuovo Cimento, 17 (1960), 956—963.
5. R. W. Lardner, Nuovo Cimento, 19 (1961), 77—89.
6. J. G. Taylor, Annals of Physics, 10 (1960), 516—535.
7. G. R. Screaton, Nuovo Cimento, 11 (1959), 229—252.
8. P. V. Landshoff, S. B. Treiman, Nuovo Cimento, 19 (1961), 1249—1256.

Поступила 10. VII 1961 г.
Киев