Об одном обобщении субпроективных пространств

П. Т. Степаненко

Проективным пространством называется пространство аффинной связности без кручения A_n, которое может быть отображено на евклидово E_n так, что все геодезические линии A_n отображаются на прямые E_n. Эти пространства достаточно изучены Вейлем.

В. Ф. Каган ввел в рассмотрение так называемые k раз проективные пространства. Пространство аффинной связности без кручения A_n с объектом связности Γ^i_{jk} называется k раз проективным, если оно может быть отображено на евклидово так, что все геодезические линии отобразятся на кривые, лежащие в $(n-k)$-мерных плоскостях в E_n.

В работе [1] В. Ф. Каган рассмотрел одну наиболее простую и в то же время ближе всего примыкающую к собственно проективным пространствам группу $(n-2)$ раза проективных пространств. Пространство называется субпроективным, если оно $(n-2)$ раза проективное и если отображение его на евклидово можно выбрать таким, чтобы все двумерные плоскости проходили через одну фиксированную точку. Этот тип пространств достаточно полно исследован в работах В. Ф. Кагана [1, 2], П. К. Рашевского [3], Г. М. Шапиро [4] и других.

Дальнейшему изучению k раз проективных пространств посвящены кандидатские диссертации В. М. Чернышенко и Д. В. Веденяпина, а также работы румынских математиков Г. Вранчеану [5] и П. Мокану [6].

В настоящей работе рассматривается одно обобщение субпроективных пространств В. Ф. Кагана.

Пространство аффинной связности без кручения A_n $(n \geqslant 3)$, которое может быть взаимно однозначно отображено на евклидово пространство E_n таким образом, что прообразы $(2n-3)$-параметрического семейства плоских кривых в E_n являются геодезическими линиями в A_n, причем все двумерные плоскости, содержащие эти плоские кривые, проходят через одну фиксированную точку, прообраз которой назовем центром пространства A_n, мы будем называть *почти-субпроективным* и обозначать через Ψ_n. Указанный комплекс геодезических линий в Ψ_n будем называть основным.

1. Найдем основное соотношение, из которого получим объект связности рассматриваемых пространств.

Для этого будем считать, что Ψ_n и E_n отнесены к общим координатам, устанавливающим отображение. В пространстве Ψ_n возьмем произвольную точку M. Тогда геодезические линии основного комплекса, проходящие через точку M, образуют некоторую «коническую» поверхность $\widetilde{F}$ $(n-1)$ измерений. Этой конической поверхности в E_n соответствует какая-то своя поверхность (F^x), образованная кривыми, лежащими в двумерных плоскостях, проходящих через точку P — образ точки M. Проведем к каждой кривой в точке P касательную; конус, образованный касательными, обозначим через (F). Пространство E_n отнесем к декартовой системе координат с началом в образе центра пространства и потребуем, чтобы координатная ось u^n не была образующей конуса (F). Тогда, если уравнение образующей поверхности (F^x) имеет вид

$$u^i = u^i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

уравнение образующей конуса (F) можно записать следующим образом:

$$U^i - u^i = \tau \frac{du^i}{dt}, \tag{2}$$

где U^i — текущие координаты образующей, u^i — координаты точки P и τ — параметр, определяющий положение точки на образующей. Но так как каждая образующая поверхности (F^x) лежит в двумерной плоскости, проходящей через начало координат, то уравнение (1) можно записать в виде

$$\begin{cases} u^i = a_i u^{n-1}(t) + b_i u^n(t) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-2) \\ u^{n-1} = u^{n-1}(t), \\ u^n = u^n(t), \end{cases} \tag{3}$$

где a_i и b_i — постоянные.

Пусть

$$\frac{d^2u^i}{dt^2}+\Gamma^i_{\alpha\beta}\frac{du^\alpha}{dt}\frac{du^\beta}{dt}=\varphi(t)\frac{du^i}{dt}\text{ —}\tag{4}$$

уравнения геодезических линий пространства Ψ_n. Поскольку плоские кривые «конуса»—образа (F^x) являются образами геодезических линий пространства Ψ_n, то из уравнений (3) должны вытекать уравнения (4). Из (3) имеем, что

$$\begin{vmatrix}\frac{d^2u^i}{dt^2} & \frac{du^i}{dt} & u^i\\ \frac{d^2u^{n-1}}{dt^2} & \frac{du^{n-1}}{dt} & u^{n-1}\\ \frac{d^2u^n}{dt^2} & \frac{du^n}{dt} & u^n\end{vmatrix}=0.\tag{5}$$

Эти соотношения имеют силу и для $i=n-1$, $i=n$. Поэтому, если

$$\frac{du^{n-1}}{dt}u^n-\frac{du^n}{dt}u^{n-1}\neq 0$$

(а это так, потому что в противном случае u^{n-1} выражалось бы через u^n и уравнения (3) были бы просто уравнениями прямых), имеем

$$\frac{d^2u^i}{dt^2}=\alpha(t)\frac{du^i}{dt}+\beta(t)u^i\quad(i=1,2,\ldots,n).\tag{6}$$

Подставляя значения (6) в (4), получаем

$$\Gamma^i_{\lambda\mu}\frac{du^\lambda}{dt}\frac{du^\mu}{dt}+\gamma\frac{du^i}{dt}+\beta u^i=0,\tag{7}$$

где $\gamma=\alpha(t)-\varphi(t)$. Из уравнений (7) вытекает, что

$$\begin{vmatrix}\Gamma^i_{\lambda\mu} & \delta^i_\nu & u^i\\ \Gamma^j_{\lambda\mu} & \delta^j_\nu & u^j\\ \Gamma^k_{\lambda\mu} & \delta^k_\nu & u^k\end{vmatrix}\frac{du^\lambda}{dt}\frac{du^\mu}{dt}\frac{du^\nu}{dt}=0.\tag{8}$$

Полученное соотношение (8) и является основным, из которого мы в дальнейшем получим объект связности рассматриваемых пространств. Заметим, что если (8) относительно производных выполняется тождественно, то, как известно, пространство Ψ_n будет субпроективным (см. [1], стр. 40), а поэтому считаем, что (8) — не тождество.

2. Покажем теперь, что (F) — алгебраический не выше третьего порядка конус или часть такого конуса.

В самом деле, из (2) вытекает, что

$$\frac{du^i}{dt}=\frac{1}{\tau}(U^i-u^i).$$

Подставляя значения производных в (8), получаем

$$\begin{vmatrix}\Gamma^i_{\lambda\mu} & \delta^i_\nu & u^i\\ \Gamma^j_{\lambda\mu} & \delta^j_\nu & u^j\\ \Gamma^k_{\lambda\mu} & \delta^k_\nu & u^k\end{vmatrix}(U^\lambda-u^\lambda)(U^\mu-u^\mu)(U^\nu-u^\nu)=0.\tag{9}$$

Отсюда вытекает наше утверждение. Более того, теорема, доказательство которой мы опускаем, утверждает:

Если пространство аффинной связности без кручения является почти-субпроективным, то при $n \geqslant 4$ конусы касательных в евклидовом пространстве к образу основного комплекса геодезических линий являются либо линейными либо квадратичными (при $n = 3$ конус (9) может быть третьего порядка).

3. Рассмотрим случай, когда комплекс является конусом третьего порядка (при этом $n = 3$).

Пусть конусы образы геодезических линий задаются полем форм с коэффициентами $a_{\alpha\beta\gamma}$. Так как в этом случае имеем единственное уравнение (8), то оно должно совпадать с уравнением (с точностью до множителя, который можем считать равным единице)

$$a_{\alpha\beta\gamma}\frac{du^{\alpha}}{dt}\frac{du^{\beta}}{dt}\frac{du^{\gamma}}{dt},$$

то есть

$$a_{\alpha\beta\gamma} = \begin{vmatrix} \Gamma^1_{\alpha\beta} & \delta^1_{\gamma} & u^1 \\ \Gamma^2_{\alpha\beta} & \delta^2_{\gamma} & u^2 \\ \Gamma^3_{\alpha\beta} & \delta^3_{\gamma} & u^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma^1_{\beta\gamma} & \delta^1_{\alpha} & u^1 \\ \Gamma^2_{\beta\gamma} & \delta^2_{\alpha} & u^2 \\ \Gamma^3_{\beta\gamma} & \delta^3_{\alpha} & u^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \Gamma^1_{\gamma\alpha} & \delta^1_{\beta} & u^1 \\ \Gamma^2_{\gamma\alpha} & \delta^2_{\beta} & u^2 \\ \Gamma^3_{\gamma\alpha} & \delta^3_{\beta} & u^3 \end{vmatrix}. \qquad 10)$$

Отсюда видим, что эти уравнения определяют $a_{\alpha\beta\gamma}$ при совершенно произвольных Γ^i_{jk}. Ограничения на Γ^i_{jk} вытекают лишь из условия, что геодезическая линия, касающаяся конуса в данной точке, продолжает его касаться и в каждой своей точке (см. [7], стр. 6). Эти условия имеют вид

$$a_{ijk,l} + a_{jkl,i} + a_{kli,j} + a_{lij,k} = N_l a_{ijk} + N_i a_{jkl} + N_j a_{kli} + N_k a_{lij}, \qquad (11)$$

где $a_{ijk,l}$ обозначает ковариантную производную тензора a_{ijk}, а N_i — компоненты произвольного вектора. Получающаяся система уравнений является совместной.

Например, если

$$\Gamma^1_{11} = 2\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \beta x, \quad \Gamma^2_{11} = \beta y, \quad \Gamma^3_{11} = \frac{\gamma}{3} + \beta z,$$

$$\Gamma^1_{12} = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \Gamma^3_{12} = 0,$$

$$\Gamma^1_{13} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad \Gamma^2_{13} = 0, \quad \Gamma^3_{13} = \frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$\Gamma^1_{22} = 0, \quad \Gamma^2_{22} = 2\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad \Gamma^3_{22} = 0,$$

$$\Gamma^1_{23} = 0, \quad \Gamma^2_{23} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad \Gamma^3_{23} = \frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

$$\Gamma^1_{33} = 0, \quad \Gamma^2_{33} = 0, \quad \Gamma^3_{33} = \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

то

$$a_{111} = \gamma y, \quad a_{112} = -\frac{\gamma}{3}x, \quad a_{113} = a_{122} = a_{123} = a_{133} =$$

$$= a_{222} = a_{223} = a_{233} = a_{333} = 0,$$

где β и φ — произвольные функции от x, y, z и $\gamma = \gamma(x, z)$. Условия (11) выполняются при

$$N_1 = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial x} - 2\beta x, \quad N_2 = 0, \quad N_3 = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial z},$$

где β и γ — те же функции.

Примечание. Случаи, когда конус (F) является линейным или квадратичным, исследуются в работе [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Ф. Каган, Обобщение понятия о проективном пространстве и соответствующем абсолюте, Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анал., вып. 1, 1933, 12—96.

2. В. Ф. Каган, Исключительный случай в теории субпроективных пространств, Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анал., вып. 2—3, 1935.

3. П. К. Рашевский, Тензорные признаки субпроективных пространств, Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анал., вып. 1, 1933.

4. Г. М. Шапиро, О метрике субпроективных пространств, Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анал., вып. 1, 1933.

5. Г. Вранчеану, Частично проективные пространства (Пространства Кагана), Тр. III Всес. матем. съезда, т. IV, 1959.

6. П. Мокану, Частично проективные пространства, Ж. чист. и прикл. матем., т. 1, № 1, 1956.

7. Я. Л. Шапиро, О некоторых полях геодезических конусов, ДАН СССР, т. XXXIX, № 1, 1943.

8. П. Т. Степаненко, Объект связности почти-субпроективных пространств, Научн. зап. ДГУ, т. 55, 1961.

Поступила 4. IX 1959 г.
Днепропетровск