О событиях, представимых в конечном автомате одним состоянием

В. Г. Боднарчук

Будем пользоваться понятиями и определениями, введенными в [1], более того, настоящую заметку можно считать небольшим дополнением к статье [1], и результаты, изложенные в ней, получены непосредственно под руководством автора работы [1].

Речь будет идти о событиях, представимых одним состоянием конечного автомата. Рассмотрение таких событий представляет большой интерес в связи с изучением автоматных разбиений свободной полугруппы $F(\mathfrak{X})$ ([1], §§ 3, 4), где $\mathfrak{X}$ — входной алфавит.

Определение 1. *Если для некоторого события S существуют такие два слова p и r, что как слово p, так и слово pr принадлежат этому событию, то слово r называется* ***связкой*** *события S (связка может входить, а может и не входить в событие S).*

Определение 2. *Слово q называется* ***циклом*** *события S, если для любого слова p из события S слово pq также принадлежит событию S.*

Теорема. *Для того, чтобы представимое событие S было представимо одним состоянием, необходимо и достаточно, чтобы каждая связка S была в то же время и циклом S.*

Необходимость. Пусть S представимо в некотором инициальном автомате A одним состоянием a, начальное состояние обозначим через a_0. Предположим, что существует такая связка r события S, что $p \in S$ и $pr \in S$, но в то же время r не является циклом S, т. е. найдется такое q, что $q \in S$, а $qr \overline{\in} S$. Введем обозначения $a_0p = a_1$, $a_0q = a_2$. Из того, что $p \in S$ и $q \in S$, следует, что $a_1 = a_2 = a$. Далее, $a_0pr = a$, так как $pr \in S$, но $a_0pr = (a_0p)\, r = ar$, т. е. $ar = a$ и $a_0qr = a$. Значит, $qr \in S$.

Таким образом, мы пришли к противоречию.

Достаточность. Пусть событие S представлено в инициальном автомате A множеством состояний M (начальное состояние обозначим через a_0) и каждая связка S является в то же время циклом S. Без ограничения общности можно считать, что автомат A связный (см. [1], § 4). Покажем, что если $a_1 \in M$ и $a_2 \in M$, то состояния a_1 и a_2 эквивалентны. Пусть выходной алфавит состоит из двух символов 0 и 1, будем считать, что S представлено в A выходным сигналом 1, а $\overline{S}$ — выходным сигналом 0. Тогда функция выходов автомата A, рассматриваемого как автомат

Мура, определится следующим образом через функцию отметок $\mu(a)$:

$$\mu(a)=\begin{cases}1, & \text{если} \quad a\in M,\\ 0, & \text{если} \quad a\overline{\in} M.\end{cases}$$

Покажем, что если $a_1\in M$ и $a_2\in M$, то $\mu(a_1p)=\mu(a_2p)$ для любого слова p из входной полугруппы $F(X)$. Действительно, существуют такие слова q_1 и q_2, принадлежащие событию S, что $a_0q_1=a_1$ и $a_0q_2=a_2$. Тогда

$$\mu(a_i p)=\begin{cases}1, \text{ если } a_ip\in M, \text{ т. е. } q_ip\in S,\\ 0 \text{ в противном случае,}\end{cases}$$

где $i=1,2$. Пусть $\mu(a_1p)=1$, тогда $q_1p\in S$, т. е, p — связка S, но так как она является в то же время и циклом S, то $q_2p\in S$, т. е. $\mu(a_2p)=1$. Пусть $\mu(a_1p)=0$, тогда должно выполняться $\mu(a_2p)=0$. Действительно, если предположить, что $\mu(a_2p)=1$, то рассуждениями, аналогичными предыдущим, можно показать, что наше предположение влечет равенство $\mu(a_1p)=1$.

Итак, все состояния из M эквивалентны.

Применим к автомату A операцию приведения. В приведенном автомате A' событие S будет представлено одним состоянием a', где a' эквивалентно каждому из состояний автомата A, входящих в множество M (см [1], § 1).

Условие теоремы, хотя оно и формулируется неконструктивно, можно иногда легко проверить, если задано какое-либо описание события S. Возьмем, например, событие $E_{x_i}^{(p-1)}$ из [2], для которого используем обозначение E'_{x_i}, употребленное в [1]. Это событие не представимо одним состоянием: $px_ix_i\in E'_{x_i}$ и $px_ix_ix_i\in E'_{x_i}$ (p — любое слово), значит, x_i — связка E'_{x_i}, но x_i не является циклом E'_{x_i}, так как $px_ix_j\in E'_{x_i}$, а $px_ix_jx_i\overline{\in} E'_{x_i}$, где $j\neq i$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Глушков, Абстрактная теория автоматов, УМН, т. XVI, вып. 5, 1961.

2. Ю. Т. Медведев, О классе событий, допускающих представление в конечном автомате, Сб. «Автоматы», 1956.

Поступила 10.XI 1961 г.
Киев