Совместные инварианты сечений пары квадрик плоскостью в многомерном комплексном проективном пространстве

С. Л. Певзнер

Пусть

$$F \equiv \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = 0 \quad \text{и} \quad H \equiv \sum_{i,\, j=1}^{n} b_{ij}x_i x_j = 0 \tag{1}$$

— квадрики в $(n-1)$-мерном комплексном проективном пространстве. Пусть, далее, имеется плоскость $n-k-1$ измерений ω, определяемая k линейно независимыми уравнениями гиперплоскостей

$$\sum_{i=1}^{n} A_{\alpha i}x_i = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, k, \quad k < n. \tag{2}$$

Квадрики в плоскости ω, получающиеся при пересечении F и H с ω, обозначим соответственно через F_ω и H_ω. В дальнейшем ограничимся случаем, когда одна из этих квадрик, скажем, H_ω, невырожденная. Это будет при условии

$$\begin{vmatrix} b_{11} \ldots b_{1n} & A_{11} \;..\; A_{k1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ b_{n1} \ldots b_{nn} & A_{1n} \ldots A_{kn} \\ A_{11} \ldots A_{1n} & 0 \;\ldots\; 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A_{k1} \ldots A_{kn} & 0 \;\ldots\; 0 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{3}$$

которое вытекает из теоремы, доказанной ниже.

Поставим задачу — найти полную систему инвариантов пары квадрик F_ω и H_ω. Как известно [1], эта система состоит из ранга матрицы квадрики $F_\omega - \lambda H_\omega$ и элементарных делителей этой матрицы.

Теорема. *Элементарные делители λ-матрицы пары квадрик F_ω и H_ω (последняя невырожденная), получающихся при пересечении квадрик (1) плоскостью $n-k-1$ измерений (2), совпадают с элементарными делителями λ-матрицы*

$$M(a_{ij} - \lambda b_{ij}, A_{\alpha\beta}) = \left\| \begin{matrix} a_{11} - \lambda b_{11} \ldots a_{1n} - \lambda b_{1n} & A_{11} \ldots A_{k1} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ a_{1n} - \lambda b_{n1} \ldots a_{nn} - \lambda b_{nn} & A_{1n} \ldots A_{kn} \\ A_{11} \quad \ldots \quad A_{1n} \quad \ldots & 0 \ldots 0 \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ A_{k1} \quad \ldots \quad A_{kn} & 0 \ldots 0 \end{matrix} \right\|, \tag{4}$$

а ранг первой на $2k$ единиц меньше ранга этой матрицы.

Эта теорема решает поставленный вопрос. Докажем ее.

Преобразуем систему координат по формулам

$$x_i = \sum_{\alpha=1}^{n} c_{i\alpha} y_\alpha. \tag{5}$$

Коэффициенты уравнений преобразованных квадрик (1) и гиперплоскостей (2) будем обозначать соответственно a'_{ij}, b'_{ij}, $A'_{\alpha\beta}$. Матрицу (4) в новых координатах обозначим $M(a'_{ij} - \lambda b'_{ij}, A'_{\alpha\beta})$. Эта же матрица может быть получена и иначе.

Образуем матрицу

$$C_1 = \left\| \begin{array}{c|c} C & 0 \\ \hline 0 & E_k \end{array} \right\|,$$

где C — матрица преобразования (5), а E_k — единичная матрица порядка k. Если C'_1 — транспонированная матрица C_1, то, как легко убедиться непосредственно,

$$M(a'_{ij} - \lambda b'_{ij}, A'_{\alpha\beta}) = C_1 \cdot M(a_{ij} - \lambda b_{ij}, A_{\alpha\beta}) \cdot C'_1.$$

Это значит [1], что $M(a_{ij} - \lambda b_{ij}, A_{\alpha\beta})$ и $M(a'_{ij} - \lambda b'_{ij}, A'_{\alpha\beta})$ эквивалентны.

Выберем теперь коэффициенты c_{ij} так, чтобы первая из гиперплоскостей (2) преобразовалась в гиперплоскость $y_1 = 0$, вторая — в $y_2 = 0, \ldots, k$-я — в $y_k = 0$. Тогда получим

$$M(a'_{ij} - \lambda b'_{ij}, A'_{\alpha\beta}) = \left\| \begin{array}{c|c} \begin{matrix} a'_{ij} - \lambda b'_{ij} \\ i, j = 1, 2, \ldots, n \end{matrix} & \begin{matrix} E_k \\ \hline \\ \end{matrix} \\ \hline E_k \quad | & 0 \end{array} \right\|.$$

В каждой из k строк (столбцов) один член равен 1, а остальные — нули. Поэтому элементарными преобразованиями можно обратить в 0 все (кроме этих единиц) члены первых k столбцов (строк), и матрица приводится к виду

$$\left\| \begin{array}{c|c|c} 0 & & E_k \\ & \begin{matrix} a'_{ij} - \lambda b'_{ij} \\ i, j = k+1, \ldots, n \end{matrix} & \\ \hline E_k & & 0 \end{array} \right\|.$$

Матрица же пары квадрик F_ω и H_ω в новых координатах совпадает с внутренней клеткой полученной матрицы, откуда и вытекает утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Мальцев, Основы линейной алгебры, М., 1956.

Поступила 17.IV 1961 г.
Комсомольск-на-Амуре