Об одном интегральном уравнении с сингулярным ядром

М. И. Розовский

Рассмотрим интегральное уравнение

$$y(t) - \int\limits_0^t \sum_{k=1}^m \xi_k Э_\alpha(t-\tau;\quad x_k)\, y(\tau)\, d\tau = p(t), \tag{1}$$

где

$$Э_\alpha(s, \varsigma) = s^{-\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\varsigma^\nu s^{\nu(1-\alpha)}}{\Gamma(\nu - \nu\alpha - \alpha + 1)}, \qquad 0 < \alpha < 1, -$$

спецфункция Ю. Н. Работнова [1], имеющая приложения при изучении физических процессов с последействием.

Без ограничения общности можно считать, что в (1) все числа x_k различны.

Будем искать решение уравнения (1) в следующем виде

$$y(t) = p(t) + \int\limits_0^t \sum_{k=1}^m a_k Э_\alpha(t-\tau;\ b_k)\, p(\tau)\, d\tau. \tag{2}$$

Тогда задача сведется к определению параметров a_k и b_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$.

Вводя, как и в предыдущей заметке [2], интегральный оператор В. Вольтерра, представим уравнения (1) и (2) в интегрально-операторной форме

$$\left[1 - \sum_{k=1}^m \xi_k Э_\alpha^*(x_k)\right] y = p, \tag{3}$$

$$\left[1 + \sum_{k=1}^m a_k Э_\alpha^*(b_k)\right] p = y. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует

$$\sum_{k=1}^m [a_k Э_\alpha^*(b_k) - \xi_k Э_\alpha^*(x_k)] - \sum_{k=1}^m a_k Э_\alpha^*(b_k) \cdot \sum_{k=1}^m \xi_k Э_\alpha^*(x_k) = 0. \tag{5}$$

После m^2-кратного применения во втором члене (5) формулы Ю. Н. Работнова [1]

$$Э_\alpha^*(u)\, Э_\alpha(v) = \frac{Э_\alpha^*(u) - Э_\alpha(v)}{u - v}, \qquad (u \neq v) \tag{6}$$

и дальнейших несложных преобразований, получим

$$\sum_{k=1}^m a_k \left(1 + \sum_{n=1}^m \frac{\xi_n}{x_n - b_k}\right) Э_\alpha^*(b_k) - \sum_{k=1}^m \xi_k \left(1 + \sum_{n=1}^m \frac{a_n}{x_k - b_n}\right) Э_\alpha^*(x_k) = 0. \tag{7}$$

Из (7) следует

$$1+\sum_{n=1}^{m}\frac{\xi_n}{x_n-b_k}=0, \qquad x_n\neq b_k, \tag{8}$$

$$(k=1,2,\ldots,m)$$

$$1+\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{x_k-b_n}=0, \qquad x_k\neq b_n. \tag{9}$$

Совокупность m равенств (8) показывает, что b_k являются корнями уравнения

$$1+\sum_{n=1}^{m}\frac{\xi_n}{x_n-r}=0. \tag{10}$$

Система m линейных уравнений (9) служит для определения коэффициентов a_n. Решение этой системы дает

$$a_n=\frac{B_n}{V_{(m)}(b_1,\ldots,b_m)}, \tag{11}$$

где

$$B_n=\sum_{n=1}^{m}A'_{nm}\left[b_n^m+\frac{1}{V_{(m)}(x_1,\ldots,x_m)}\sum_{g=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^m A_{ig}\right)b_n^{g-1}\right]. \tag{12}$$

В (12) A'_{nm} — алгебраическое дополнение элемента b_n^{m-1} определителя Вандермонда $V_{(m)}(x_1,\ldots,x_m)$, A_{ig} — алгебраическое дополнение, соответствующее элементу i-го столбца и g-й строки определителя $V_{(m)}(x_1,\ldots,x_m)$. Значения b_n определяются из уравнения

$$r^m+\sum_{k=1}^{m}p_k r^{m-k}=0, \tag{13}$$

являющегося следствием уравнения (10). В уравнении (13) коэффициенты

$$\begin{aligned}p_k={}&\sum_{j=1}^{m}\xi_j x_j^{k-1}-\frac{1}{V_{(m)}(x_1,\ldots,x_m)}\sum_{j=1}^{m}x_j^m A_{j;m-k+1}+\\&+\frac{1}{V_{(m)}(x_1,\ldots,x_m)}\sum_{n=1}^{m-1}\left(\sum_{j=1}^{m}x_j^m A_{j;\,m-n+1}\sum_{j=1}^{m}\xi_j x_j^{m-n-1}\right),\end{aligned} \tag{14}$$

где $A_{j;\,m-k+1}$ — алгебраическое дополнение, соответствующее элементу j-го столбца и $(m-k+1)$-й строки определителя Вандермонда $V_{(m)}(x_1,\ldots,x_m)$; величина $A_{j;m-n+1}$ определяется аналогично.

При $p(t)=p_0=\mathrm{const}$ решение уравнения (1) можно представить в следующем виде

$$y(t)=p_0\left\{1-\sum_{k=1}^{m}\frac{a_k}{b_k}\left[1-E_{1-\alpha}(b_k t^{1-\alpha})\right]\right\}, \tag{15}$$

где $E_\mu(\varsigma)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\varsigma^\nu}{\Gamma(\nu\mu+1)}$ — функция Миттаг—Леффлера [3], или приближенно

$$y(t) \approx p_0 \left[1 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} (1 - e^{-\gamma b_k t^{1-\alpha}}) \right], \tag{16}$$

где $\gamma = (1 - \alpha)^{1-\alpha}$. При $\alpha = 0$ приближенное равенство (16) становится точным.

Формула (2), в который a_k определяется из (11), применяется непосредственно, если уравнение (10) не имеет кратных корней. Если же уравнение (10) имеет кратные корни, то $V_{(m)}(b_1, \ldots, b_m) = 0$ и выражение, фигурирующее под знаком интеграла в формуле (2), становится неопределенностью, которая раскрывается по правилу Лопиталя. Так, при $b_1 = b_2 = \ldots = b_{i+1}$, где $i + 1 \leqslant m$, из (2) и (11) следует

$$y(t) = p(t) + \int_0^t \frac{\left[\frac{\partial}{\partial b_i} \left[\cdots \left[\frac{\partial}{\partial b_1} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \mathcal{E}_\alpha (t - \tau; b_k) \right]_{b_1 = b_2} \right]_{b_i = b_{i+1}} \right]}{\left[\frac{\partial}{\partial b_i} \left[\cdots \left[\frac{\partial}{\partial b_1} V_{(m)} (b_1, \ldots, b_m) \right]_{b_1 = b_2} \right]_{b_i = b_{i+1}} \right]} p(\tau)\, d\tau. \tag{17}$$

В (17) операция дифференцирования выполняется i раз, сначала по b_1, затем после подстановки b_2 вместо b_1, по b_2 и так далее до b_i.

Пусть, например, коэффициенты уравнения (10) при $m = 2$ таковы, что

$$(x_1 + x_2 + \xi_1 + \xi_2)^2 - 4(x_1 x_2 + \xi_1 x_2 + \xi_2 x_1) = 0.$$

В этом случае будем иметь

$$b_1 = b_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + \xi_1 + \xi_2). \tag{18}$$

Тогда, пользуясь формулой (17) при $m = 2$, с учетом (18), получим

$$y(t) = p(t) + \int_0^t \left\{ (\xi_1 + \xi_2) \mathcal{E}_\alpha (t - \tau; b_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} \left[(\xi_1 + \xi_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 \right] \frac{\partial \mathcal{E}_\alpha (t - \tau; b_1)}{\partial b_1} \right\} p(\tau)\, d\tau.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Н. Работнов, Равновесие упругой среды с последействием, Прикл. матем. и мех., т. 12, в. 1, 1948.
2. М. И. Розовский, Об одном нелинейном интегральном уравнении, УМЖ, т. 12, № 1, 1960.
3. A. Wiman, Über Fundamentalsatz in der Theorie der Functionen $E\alpha(x)$, Acta, math., Bd. 29, S. 191, 1905.

Поступила 3.X 1959 г.
Днепропетровск