Применение метода усреднения к решению уравнений в частных производных

З. Ф. Сирченко

Рассмотрим уравнение гиперболического типа с постоянными коэффициентами

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x} + C\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial u}{\partial t} + b\frac{\partial u}{\partial x} = du + \varepsilon F_1\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad (1)$$

где ε — малое положительное число, F_1 — нелинейная функция своих аргументов, а коэффициенты A, B и C удовлетворяют условию

$$B^2 - AC > 0$$

Уравнение (1), как известно, при помощи замены независимых переменных и замены неизвестной функции приводится к уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - c^2\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = \gamma v + \varepsilon F_2\left(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}\right).$$

Ставим следующую задачу: найти приближенное с точностью до величин порядка ε^m, $m = 1, 2, 3\ldots$, решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma u + \varepsilon F\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad (2)$$

при следующих граничных и начальных условиях:

$$\begin{aligned} &u(0, t) = u(l, t) = 0, \\ &u|_{t=0} = q(x), \\ &\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = h(x), \end{aligned} \quad (3)$$

где $q(x)$ и $h(x)$ — заданные непрерывные функции, удовлетворяющие условиям Дирихле и некоторым дополнительным условиям, а $F\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$ — периодическая функция времени.

При отсутствии возмущения имеем задачу

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma u, \\ &u(0, t) = u(l, t) = 0, \\ &u|_{t=0} = q(x), \\ &\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = h(x). \end{aligned} \quad (4)$$

При условии, что $\left(\frac{\pi c n}{l}\right)^2 - \gamma > 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, решая методом Фурье, находим

$$u_0(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t)\sin\frac{\pi n}{l}x, \quad (5)$$

где $\omega_n = \sqrt{\left(\frac{\pi c n}{l}\right)^2 - \gamma}$ — частота n-го нормального колебания, а A_n и B_n — постоянные, определяемые начальными условиями. Так как ε — малый параметр, то форма колебания возмущенной системы, как это указывалось в работе [1], будет определяться теми же собственными функциями, что и форма колебания системы при $\varepsilon = 0$, т. е. решение уравнения (2) при условиях (3) будем искать в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t, \varepsilon) \sin \frac{\pi n}{l} x, \tag{6}$$

где $g_n(t, \varepsilon)$ — функции, подлежащие определению. После умножения на $\sin \frac{\pi m}{l} x$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, и интегрирования по x в пределах от 0 до l, получаем бесконечную систему уравнений для определения $g_m(t, \varepsilon)$

$$\frac{d^2 g_m}{dt^2} + \omega_m^2 g_m = \varepsilon \Phi_m(t, g_1, g_2, \ldots, \dot{g}_1, \dot{g}_2, \ldots) \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots), \tag{7}$$

где Φ_m — некоторая нелинейная функция своих аргументов. Для решения этой системы должны выполняться начальные условия

$$g_n|_{t=0} = q_n, \qquad \left.\frac{dg_n}{dt}\right|_{t=0} = h_n,$$

где q_n и h_n — коэффициенты Фурье для функций $q(x)$ и $h(x)$. Для решения этой системы используем метод, изложенный в монографии Н. Н. Боголюбова, Ю. А. Митропольского [2], т. е. делаем в (7) замену переменных

$$\begin{aligned} g_m &= z_m e^{i\omega_m t} + z_{-m} e^{-i\omega_m t}, \\ \dot{g}_m &= i\omega_m z_m e^{i\omega_m t} - i\omega_m z_{-m} e^{-i\omega_m t}, \end{aligned} \tag{8}$$

в которой z_m и z_{-m} — комплексно-сопряженные неизвестные функции времени. Получаем

$$\frac{dz_m}{dt} = \varepsilon \frac{e^{-i\omega_m t}}{2i\omega_m} \Phi_m(t, z_k e^{i\omega_k t}, z_{-k} e^{-i\omega_k t}),$$

$$\frac{dz_{-m}}{dt} = -\varepsilon \frac{e^{i\omega_m t}}{2i\omega_m} \Phi_m(t, z_k e^{i\omega_k t}, z_{-k} e^{-i\omega_k t}) \qquad (m, k = 1, 2, 3 \ldots). \tag{9}$$

Положим по определению $\omega_{-m} = -\omega_m$, $\Phi_{-m} = \Phi_m$. Тогда систему (9) можно представить в виде

$$\frac{dz_n}{dt} = \varepsilon \frac{e^{-i\omega_n t}}{2i\omega_n} \Phi_n(t, z_k e^{i\omega_k t}) \qquad (n, k = \pm 1, \pm 2 \ldots). \tag{10}$$

Итак, вместо одного дифференциального уравнения в частных производных относительно переменной $u(x, t)$ имеем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно переменных $z_n(t)$, правые части которых имеют множителем малый параметр ε, т. е. имеем систему уравнений в стандартной форме. Обозначая

$$\frac{e^{-i\omega_n t}}{2i\omega_n} \Phi_n = Z_n(t, z_k),$$

получаем

$$\frac{dz_n}{dt} = \varepsilon Z_n(t, z_k) \qquad (n, k = \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{11}$$

Для получения уравнений первого приближения, т. е. для получения приближенного решения с точностью до величин порядка ε, заменяем точные уравнения (11) приближенными, применяя принцип усреднения

$$\frac{dz_n}{dt} = \varepsilon \underset{t}{M} \{Z_n(t, z_k)\} \qquad (n, k = \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{12}$$

Условия, при которых для достаточно малого ε разность между решением точных уравнений (11) и решением усредненных уравнений (12) может быть сделана сколь угодно малой на сколь угодно большом, но все же конечном интервале времени, даны Д. С. Лосем [3]. Уравнения второго приближения находим по формуле

$$\frac{dz_n}{dt} = \varepsilon \underset{t}{M} \left\{ Z_n(t, z_k) + \varepsilon \left(\widetilde{Z}_n \frac{\partial}{\partial z_n} \right) Z_n(t, z_k) \right\}, \tag{13}$$

где

$$\widetilde{Z}_n = \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} Z_{n\nu}(z_k) \qquad (n, k = \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Решение уравнений первого приближения (12) требует в общем случае совместного решения бесконечной системы уравнений с бесконечным числом неизвестных.

Рассмотрим несколько задач, для которых уравнения первого приближения позволяют определять последовательно все неизвестные $z_n(t)$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. К уравнению типа (2) приходим при изучении распространения электромагнитных колебаний по кабелю, параметры которого мало отличаются от постоянных [4]. Параметры системы, т. е. коэффициенты сопротивления, самоиндукции, емкости и проводимости изоляции, зависят от неизвестной функции.

Допустим, что эта зависимость такова, что уравнение (2) имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma u + \varepsilon A(x, t)\, u \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{14}$$

Следует найти приближенное решение этого уравнения при условиях (3). Пусть $\gamma \neq 0$, тогда $k\omega_1 \neq \omega_k$, т. е. внутренний резонанс в системе отсутствует. Допустим, что в уравнении (14) функция $A(x, t)$ имеет вид

$$A(x, t) = \cos \frac{\pi}{l} x \cos \sqrt{\left(\frac{\pi c}{l}\right)^2 - \gamma}\; t = \cos \frac{\pi}{l} x \cos \omega_1 t,$$

т. е. частота внешней силы равна частоте первого нормального колебания невозмущенной системы. В уравнении (14) сделаем замену переменных

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t, \varepsilon) \sin \frac{\pi n}{l} x. \tag{15}$$

После умножения на $\sin \frac{\pi m}{l} x$, $m = 1, 2, 3 \ldots$, и интегрирования по x в пределах от 0 до l, получаем

$$\frac{d^2 g_m}{dt^2} + \omega_m^2 g_m = \varepsilon \frac{2\pi}{l^2} \sum_{n,k=1}^{\infty} k g_n(t, \varepsilon) g_k(t, \varepsilon) \cos \omega_1 t \int_0^l \cos \frac{\pi}{l} x \sin \frac{\pi n}{l} x \cos \frac{\pi k}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} x\, dx = \varepsilon \Phi_m \quad (m = 1, 2, \ldots). \tag{16}$$

Расписывая выражение под знаком интеграла на сумму косинусов и вычисляя интегралы, получаем в правой части системы (16)

$$\varepsilon\Phi_m = \varepsilon\frac{\pi}{4l}\cos\omega_1 t\left[\sum_{n=m}^{\infty}(1-m)g_n g_{n-(m-1)} - \sum_{n=m+2}^{\infty}(1+m)g_n g_{n-(m+1)} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{n=m-2\\ m\geqslant 3}}^{\infty}(m-1-n)g_n g_{m-1-n} + \sum_{n=1}^{\infty}(m+1-n)g_n g_{m+1-n}\right]. \qquad (17)$$

После подстановки

$$g_m = z_m e^{i\omega_m t} + z_{-m}e^{-i\omega_m t},$$

$$\cos\omega_1 t = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega_1 t} + e^{-i\omega_1 t}\right)$$

согласно формулам (12) уравнения первого приближения имеют вид

$$\frac{dz_1}{dt} = \varepsilon\frac{\pi}{16i\omega_1 l}(2z_1 z_{-1} + z_1^2),$$

$$\frac{dz_{-1}}{dt} = -\varepsilon\frac{\pi}{16i\omega_1 l}(2z_1 z_{-1} + z_{-1}^2),$$

$$\frac{dz_k}{dt} = \varepsilon\frac{\pi}{8i\omega_k l}(z_1 + z_{-1})z_k. \qquad (18)$$

$$\frac{dz_{-k}}{dt} = -\varepsilon\frac{\pi}{8i\omega_k l}(z_1 + z_{-1})z_{-k} \quad (k = 2, 3\ldots).$$

Таким образом, определив из первых двух уравнений z_1 и z_{-1}, можем определить последовательно z_k, $k = \pm 2, \pm 3, \ldots$.
Уравнения второго приближения для этой задачи следующие:

$$\frac{dz_1}{dt} = \frac{\varepsilon\pi}{16i\omega_1 l}(2z_1 z_{-1} + z_1^2) + \frac{\varepsilon^2\pi^2}{16^2 i\omega_1^2 l^2}\left[\frac{z_1}{\omega_1}(z_{-1}^2 + z_1 z_{-1}) - \frac{8\omega_1}{\omega_3^2 - \omega_1^2}z_3 z_{-3} z_{-1}\right],$$

$$\frac{dz_{-1}}{dt} = -\frac{\varepsilon\pi}{16i\omega_1 l}(2z_1 z_{-1} + z_{-1}^2) - \frac{\varepsilon^2\pi^2}{16^2 i\omega_1^2 l^2}\left[\frac{z_{-1}}{\omega_1}(z_1^2 + z_1 z_{-1}) - \frac{8\omega_1}{\omega_3^2 - \omega_1^2}z_3 z_{-3} z_1\right],$$

$$\frac{dz_k}{dt} = \frac{\varepsilon\pi}{8i\omega_k l}(z_1 + z_{-1})z_k, \qquad (19)$$

$$\frac{dz_{-k}}{dt} = -\frac{\varepsilon\pi}{8i\omega_k l}(z_1 + z_{-1})z_{-k} \quad (k = 2, 3, \ldots).$$

Эта система значительно сложнее системы (18), так как для ее решения нужно решать совместно уже систему четырех уравнений, определяющую $z_1(t)$, $z_{-1}(t)$, $z_3(t)$, $z_{-3}(t)$.

В качестве второго примера рассмотрим построение уравнений первого приближения для системы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma u + \varepsilon\sin\frac{\pi}{l}x\cos\omega_1 t\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \lambda\right), \qquad (20)$$

где λ — постоянная. После ряда выкладок получаем уравнения первого приближения

$$\frac{dz_1}{dt} = \varepsilon \frac{1}{16i\omega_1}\left[\frac{\pi^2}{l^2}(2z_1z_{-1} + z_1^2) + 4\lambda\right],$$

$$\frac{dz_{-1}}{dt} = -\varepsilon \frac{1}{16i\omega_1}\left[\frac{\pi^2}{l^2}(2z_1z_{-1} + z_{-1}^2) + 4\lambda\right], \tag{21}$$

$$\frac{dz_k}{dt} = 0 \quad (k = \pm 2, \pm 3, \ldots).$$

Наконец, для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma u + \varepsilon \sin\frac{\pi}{l}x\cos\omega_1 t\, u\frac{\partial u}{\partial t} \tag{22}$$

получаем

$$\varepsilon\Phi_m = \varepsilon\frac{1}{4}\cos\omega_1 t\left[\sum_{n=m}^{\infty}(g_n\dot{g}_{n+1-m} + g_{n+1-m}\dot{g}_n) - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=m+2}^{\infty}(g_n\dot{g}_{n-(m+1)} + g_{n-(m+1)}\dot{g}_n) - \sum_{n=m-2}^{\infty} g_n\dot{g}_{m-1-n} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n\dot{g}_{m+1-n}\right],$$

а уравнения первого приближения имеют вид

$$\frac{dz_1}{dt} = \varepsilon\frac{3}{16}z_1^2,$$

$$\frac{dz_{-1}}{dt} = \varepsilon\frac{3}{16}z_{-1}^2,$$

$$\frac{dz_k}{dt} = \varepsilon\frac{1}{8\omega_k}[(\omega_1 + \omega_k)z_1 + (\omega_k - \omega_1)z_{-1}]z_k, \tag{23}$$

$$\frac{dz_{-k}}{dt} = \varepsilon\frac{1}{8\omega_k}[(\omega_k - \omega_1)z_1 + (\omega_1 + \omega_k)z_{-1}]z_{-k} \quad (k = 2, 3, \ldots).$$

Эта система имеет решение

$$z_1(t) = \frac{1}{C_1 - \frac{3\varepsilon}{16}t},$$

$$z_{-1}(t) = \frac{1}{\bar{C}_1 - \frac{3\varepsilon}{16}t}, \tag{24}$$

$$z_k(t) = \frac{C_k}{\left(C_1 - \frac{3\varepsilon}{16}t\right)^{\frac{2(\omega_1+\omega_k)}{3\omega_k}} \cdot \left(\bar{C}_1 - \frac{3\varepsilon}{16}t\right)^{\frac{2(\omega_k-\omega_1)}{3\omega_k}}},$$

$$z_{-k}(t) = \frac{\bar{C}_k}{\left(C_1 - \frac{3\varepsilon}{16}t\right)^{\frac{2(\omega_k-\omega_1)}{3\omega_k}} \cdot \left(\bar{C}_1 - \frac{3\varepsilon}{16}t\right)^{\frac{2(\omega_1+\omega_k)}{3\omega_k}}} \quad (k = 2, 3, \ldots),$$

где C_k, $\overline{C}_k$ — комплексно-сопряженные постоянные, определяемые из начальных условий.

Из системы (24) видим, что все $z_k(t)$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, при $t \to \infty$ стремятся к 0, но стремление z_k, $k = \pm 2, \pm 3, \ldots$, к 0 будет значительно быстрее, чем стремление $z_1(t)$ и $z_{-1}(t)$, так как $z_1(t)$, $z_{-1}(t)$ затухают приблизительно обратно пропорционально увеличению линейной функции времени, а $z_k(t)$, $k = \pm 2, \pm 3, \ldots$, — обратно пропорционально увеличению $t^{\frac{4}{3}}$.

Таким образом, основной тон колебаний будет более продолжительным по времени, чем тона с частотами ω_2, ω_3 и т. д.

Во всех приведенных выше примерах можно рассматривать частные решения уравнений первого приближения, соответствующие одночастотному режиму, т. е. решения, для которых $z_1(t)$ и $z_{-1}(t)$ определяются из системы первых двух уравнений, а $z_{\pm k}(t) = 0$, $k = 2, 3, \ldots$

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. М. Крылов, Н. Н. Боголюбов, Исследование явлений резонанса при поперечных колебаниях стержней, находящихся под воздействием периодических нормальных сил, приложенных к одному из концов стержня, Сб. статей «Исследование колебания конструкций», Харьков—Киев, ОНТИ, 1935.

2. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.

3. Д. С. Лось, О принципе усреднения для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве, УМЖ, т. II, № 3, 1950.

4. А. Н. Крылов, О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах, Изд-во АН СССР, Л., 1933.

Поступила 20.VIII 1961 г.
Киев