# К вопросу о построении стационарных решений для некоторых колебательных систем с одной степенью свободы

*Э. Ф. Файзибаев*

Изучение ряда механических и электрических процессов колебательного характера, встречающихся в различных областях физики и механики, приводит к рассмотрению следующего дифференциального уравнения автоколебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + (\alpha + \gamma_1 x^2)\,x = \varepsilon(\beta + \gamma_2 x^2)\frac{dx}{dt} + R\sin m\omega t \tag{1}$$

В случае механических колебаний $x$ является координатой, определяющей положение колеблющейся системы, $k > 0$ — коэффициент трения, $\alpha$, $\beta$,

$\gamma_1$, $\gamma_2$ — известные постоянные величины, $\omega$, $R$ — положительные постоянные, $m$ — целое число, $t$ — время, $\varepsilon$ — малый параметр, $R \sin m\omega t$ — внешняя синусоидальная возмущающая сила.

Простейшие колебания такой системы, приближенно представляемые формулой

$$x = A \sin (m\omega t + \varphi),$$

хорошо изучены многими авторами, например в работах [2, 3] и т. д.

Задачи, в решениях которых учитывались высшие гармоники, рассматривались в работах [4, 5] и др.

В этой работе показывается, что в автоколебательной системе, описываемой дифференциальным уравнением (1), наряду с колебаниями, совершающимися с частотой внешней возмущающей силы, возможны колебания с комбинационными частотами.

Приближенное решение уравнения (1) ищем в виде

$$x(t) = C + A \sin (m\omega t + \varphi) + B \sin (n\omega t + \psi), \tag{2}$$

где $C$, $A$, $B$, $\varphi$, $\psi$ — неизвестные постоянные, $n$ — целое число, взаимно простое с $m$. Графические решения этой задачи показывают эффективность этого метода, хотя последний математически строго не обоснован.

Для нахождения указанных постоянных решение (2) подставляем в данное уравнение (1) и, собирая члены при одинаковых гармониках, получим

$$C\left[\alpha - \gamma_1\left(C^2 - \frac{3}{2}A^2 - \frac{3}{2}B^2\right)\right] + A\left[\alpha - m^2\omega^2 + 3\gamma_1\left(C^2 + \frac{1}{4}A^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left.+ \frac{1}{2}B^2\right)\right]\sin(m\omega t + \varphi) + m\omega A\left[k - \varepsilon\left(\beta + \gamma_2 C^2 + \frac{1}{4}\gamma_2 A^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left.+ \frac{1}{2}\gamma_2 B^2\right)\right]\cos(m\omega t + \varphi) + B\left[\alpha - n^2\omega^2 + 3\gamma_1\left(C^2 + \frac{1}{4}B^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left.+ \frac{1}{2}A^2\right)\right]\sin(n\omega t + \psi) + n\omega B\left[k - \varepsilon\left(\beta + \gamma_2 C^2 + \frac{1}{2}\gamma_2 A^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left.+ \frac{1}{4}\gamma_2 B^2\right)\right]\cos(n\omega t + \psi) - \varepsilon\gamma_2 A^2 C m\omega \sin(2m\omega t + 2\varphi) -$$

$$- \varepsilon\gamma_2 n\omega B^2 C \sin(2n\omega t + 2\psi) - \frac{3}{2}\gamma_1 A^2 C \cos(2m\omega t + 2\varphi) -$$

$$- \frac{3}{2}\gamma_1 B^2 C \cos(2n\omega t + 2\psi) - \frac{1}{4}\gamma_1 A^3 \sin(3m\omega t + 3\varphi) -$$

$$- \frac{1}{4}\gamma_1 B^3 \sin(3n\omega t + 3\psi) + \frac{1}{4}\varepsilon\gamma_2 m\omega A^3 \cos(3m\omega t + 3\varphi) +$$

$$+ \frac{1}{4}\varepsilon\gamma_2 n\omega B^3 \cos(3n\omega t + 3\psi) - \varepsilon\gamma_2 ABC[m + n]\omega \sin[(m + n)\omega t +$$

$$+ \varphi + \psi] - 3\gamma_1 ABC \cos[(m + n)\omega t + \varphi + \psi] -$$

$$- \varepsilon\gamma_2 [m + n]\omega ABC \sin[(m - n)\omega t + \varphi - \psi] +$$

$$+ 3\gamma_1 ABC \cos[(m - n)\omega t + \varphi - \psi] -$$

$$- \frac{3}{4}\gamma_1 A^2 B \sin[(2m + n)\omega t + 2\varphi + \psi] +$$

$$+\frac{3}{4}\gamma_1 A^2 B\sin[(2m-n)\omega t+2\varphi-\psi]-$$

$$-\frac{3}{4}\gamma_1 AB^2\sin[(m-2n)\omega t+\varphi-2\psi]+$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon\gamma_2 A^2 B\left[m+\frac{n}{2}\right]\omega\cos[(2m+n)\omega t+2\varphi+\psi]+$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon\gamma_2 A^2 B\left[\frac{n}{2}-m\right]\omega\cos[(2m-n)\omega t+2\varphi-\psi]+$$

$$+\frac{1}{2}\varepsilon\gamma_2 A^2 B\left[n+\frac{m}{2}\right]\omega\cos[(m+2n)\omega t+\varphi+2\psi]-$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon\gamma_2 AB^2\left[n-\frac{m}{2}\right]\omega\cos[(m-2n)\omega t+\varphi-2\psi]=$$

$$=R\cos\varphi\sin(m\omega t+\varphi)-R\sin\varphi\cos(m\omega t+\varphi). \tag{3}$$

(Отсюда видно, что полученное выражение содержит члены с «основными» частотами 0, $m\omega$, $n\omega$ и с «комбинационными» частотами $2m\omega$, $2n\omega$, $3m\omega$, $3n\omega$, $(m+n)\omega$, $|m-n|\omega$, $(2m+n)\omega$, $|2m-n|\omega$, $(m+2n)\omega$, $|m-n|\omega$ Если ни одна из комбинационных частот не равна ни одной из основных, то, сравнивая коэффициенты при основных гармониках, получим

$$C=0,\ B=0,$$

$$A\left[\alpha-m^2\omega^2+\frac{3}{4}\gamma_1 A^2\right]=R\cos\varphi,$$

$$m\omega A\left[k-\varepsilon\beta-\frac{1}{4}\varepsilon\gamma_2 A^2\right]=-R\sin\varphi. \tag{4}$$

Это известное уравнение для нахождения коэффициентов приближенного решения $x=A\sin(m\omega t+\varphi)$. Рассмотрим случай, когда некоторые комбинационные частоты совпадают с основными частотами. Как видно из (3), это возможно только в следующих четырех случаях:

1) $m=1,\ n=3,\ 3m=n,\ |2m-n|=m,$

2) $m=3,\ n=1,\ 3n=m,\ |m-2n|=n,$

3) $m=1,\ n=2,\ 2m=n,\ |m-n|=m,\ |2m-n|=0,$

4) $m=2,\ n=1,\ 2n=m,\ |m-n|=n,\ |m-2n|=0.$

Теперь рассмотрим каждый случай в отдельности.

1) $m=1,\ n=3,\ 3m=n,\ |2m-n|=m.$ Приближенное решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k\frac{dx}{dt}+(\alpha+\gamma_1 x^2)x=\varepsilon(\beta+\gamma_2 x^2)\frac{dx}{dt}+R\sin\omega t \tag{5}$$

ищем в следующем виде

$$x=A\sin(\omega t+\varphi)+B\sin(3\omega t+\psi). \tag{6}$$

Здесь $C=0$, потому что ни одна из комбинационных частот в этом случае не равна нулю. Подставляя в выражение (3) $C=0$, $m=1$, $n=3$, приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках с частотами $\omega$ и

$3\omega$ и введя обозначения $\frac{B}{A} = p$, $3\varphi - \psi = \delta$, получим

$$A(\alpha - \omega^2) + \frac{3}{4}A^3\left[\gamma_1(1 - p\cos\delta + 2p^2) + \frac{1}{3}\varepsilon\gamma_2\omega p\sin\delta\right] = R\cos\varphi,$$

$$\omega A(k - \varepsilon\beta) - \frac{3}{4}A^3\left[\frac{1}{3}\gamma_2 - \gamma_1 p\sin\delta + \varepsilon\gamma_2\left(2p^2 - \frac{1}{3}\omega p\cos\delta\right)\right] = -R\sin\varphi,$$

$$Ap(\alpha - 9\omega^2) + \frac{3}{4}A^3\left[\gamma_1\left(p^3 + 2p - \frac{1}{3}\cos\delta\right) - \frac{1}{3}\varepsilon\gamma_2\omega\sin\delta\right] = 0, \tag{7}$$

$$3\omega Ap(k - \varepsilon\beta) - \frac{3}{4}A^3\left[\frac{1}{3}\gamma_1\sin\delta + \frac{1}{3}\varepsilon\gamma_2(6p + 3p^3 - \omega\cos\delta)\right] = 0.$$

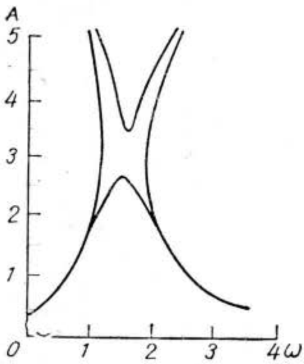

Рис. 1.

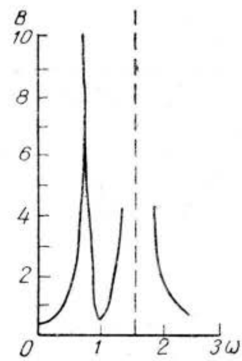

Рис. 2.

Отсюда находим

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{\omega(k - \varepsilon\beta)}{\alpha - 9\omega^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \xi < \frac{\pi}{2},$$

$$3p\gamma_1(2 + p^2)[3\gamma_1\sin\xi + \varepsilon\gamma_2\cos\xi] + \gamma_1\sin(\delta - \xi) -$$

$$-\varepsilon\gamma_2\omega\cos(\delta - \xi) - 2\sin\xi(\gamma_1\cos\delta + \varepsilon\gamma_2\omega\sin\delta) = 0,$$

$$A^2 = \frac{4p\omega(k - \varepsilon\beta)}{\frac{1}{3}\gamma_1\sin\delta + \varepsilon\gamma_2\left(2p + p^3 - \frac{1}{3}\omega\cos\delta\right)}, \tag{8}$$

$$A(\alpha - \omega^2) + \frac{3}{4}A^3\left[\gamma_1(1 - p\cos\delta + 2p^2) + \frac{1}{3}\varepsilon\gamma_2\omega p\sin\delta\right] = R\cos\varphi,$$

$$\omega A(k - \varepsilon\beta)\left[1 - \frac{p(\gamma_2 - 3\gamma_1 p\sin\delta) + \varepsilon\delta_2 p(6p - \omega\cos\delta)}{\frac{1}{3}\gamma_1\sin\delta + \varepsilon\gamma_2\left(2p + p^3 - \frac{1}{3}\omega\cos\delta\right)}\right] = -R\sin\varphi.$$

Тогда, задаваясь значениями $\omega$ и $p$, по формулам (8) последовательно определяем $\xi$, $\delta$, $A$, $B$, $R$.

При $k = 0{,}1$, $\varepsilon = 0{,}01$, $\beta = 0{,}4$, $\alpha = 0{,}5$, $\gamma_1 = 1$, $p = 0{,}5$, $\gamma_2 = 0{,}5$ на рис. 1 и 2 построены графики $A(\omega)$ и $B(\omega)$. На рис. 3 построена зависимость $R$ от $\omega$ при различных $k$. На рис. 4 построена зависимость $R(\omega)$ при постоянном $k = 0{,}1$. При $\varepsilon = 0$, $\alpha = 1$, $\gamma_1 = 0{,}01$, $R = 1$ построены графики зависимости $A(\omega)$ и $B(\omega)$ (рис. 5).

Влияние трения ограничивает рост амплитуды третьей гармоники $|B|$. Тем не менее в некоторой определенной области частот величина $|B|$ может быть довольно большой, так что движение сильно отличается

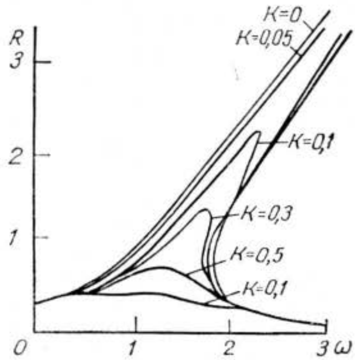


Рис. 3.

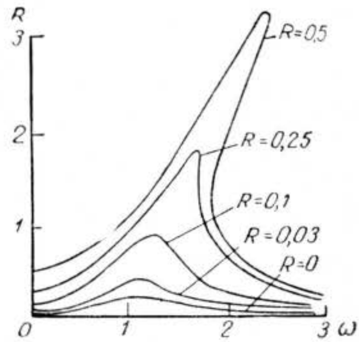


Рис. 4.

от синусоидального. Из графика видно, что при изменении $\omega$ третья гармоника резко меняет свою величину и фазу, переходя с одной ветви резонансной кривой на другую, конечно, при достаточно малом трении. Следовательно, обнаруженное явление можно охарактеризовать как «нелинейный резонанс третьей гармоники колебаний».

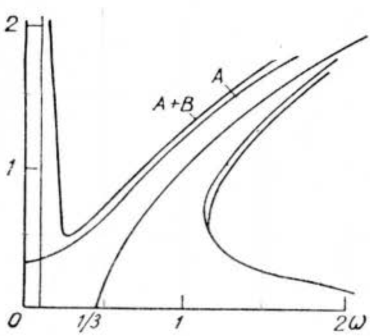


Рис. 5.

Следовательно, в этом случае решение нигде не совпадает с синусоидальным приближением $x = A \sin (m\omega t + \varphi)$, но, за исключением точек, лежащих на двух близких друг к другу особенных ветвях, дает небольшую поправку к нему. Особенные ветви решений в этом случае отклоняются от основного решения, близкого к синусоидальному, при довольно низких частотах возмущающей силы.

Теперь рассмотрим те области, где полученное решение мало отличается от синусоидального приближения.

Для этого предположим, что $k$ мало, $\omega \neq \frac{1}{3}\sqrt{\alpha}$, $p$ мало. Тогда $\operatorname{tg} \xi$, $\sin \xi$ также малы. Поскольку

$$\sin \xi = \frac{\omega (k - \varepsilon\beta)}{\sqrt{(\alpha - 9\omega^2)^2 + \omega^2 (k - \varepsilon\beta)^2}},$$

$$\sin (\delta - \xi) \approx 0,$$

то

$$\sin \delta \approx \sin \xi.$$

Из третьего уравнения (8), если учесть малость $\varepsilon$, $p$,

$$p = \frac{A^2\omega [\gamma_1 k - \varepsilon (\gamma_1\beta + \gamma_2\alpha - 9\gamma_2\omega^2]}{3 [4k\omega - 2\varepsilon (2\beta\omega + \gamma_2 A^2)] \cdot \sqrt{(\alpha - 9\omega^2)^2 + \omega^2 (k - \varepsilon\beta)^2}}. \tag{9}$$

Если пренебречь величиной $p$ в двух последних уравнениях (8), то получим

$$A(\alpha-\omega^2)+\frac{3}{4}\gamma_1 A^3 = R\cos\varphi,$$
$$\omega A(k-\varepsilon\beta) = -R\sin\varphi. \tag{10}$$

Из первого уравнения (10) находим значение $A$. Тогда

$$B=\frac{A^3\omega\,[\gamma_1 k-\varepsilon(\gamma_1\beta+\gamma_2\alpha-9\gamma_2\omega^2)]}{3\,[4k\omega-2\varepsilon(2\beta\omega+\gamma_2A^2)]\sqrt{(\alpha-9\omega^2)^2+\omega^2(k-\varepsilon\beta)^2}}, \tag{11}$$

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{\omega(k-\varepsilon\beta)}{\alpha-\omega^2+\frac{3}{4}\gamma_1A^2},\quad \operatorname{tg}\delta\approx\operatorname{tg}\xi=\frac{\omega(k-\varepsilon\beta)}{\alpha-9\omega^2}. \tag{12}$$

2) Приближенное решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k\frac{dx}{dt}+(\alpha+\gamma_1x^2)\,x=\varepsilon(\beta+\gamma_2x^2)\frac{dx}{dt}+R\sin 3\omega t \tag{13}$$

ищем в следующем виде (в этом случае тоже $C=0$)

$$x=B\sin(\omega t+\psi)+A\sin(3\omega t+\varphi). \tag{14}$$

Подставляя в (3) $C=0$, $m=3$, $n=1$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках с частотами $\omega$ и $3\omega$, получаем

$$B\left[\alpha-\omega^2+\frac{3}{4}\gamma_1(B^2+2A^2)\right]-\frac{3}{4}\gamma_1AB^2\cos(3\psi-\varphi)+$$
$$+\frac{1}{4}\varepsilon\gamma_2\omega AB^2\sin(3\psi-\varphi)=0,$$
$$\omega B\left[k-\varepsilon\beta-\frac{1}{2}\varepsilon\gamma_2A^2-\frac{1}{4}\varepsilon\gamma_2B^2\right]+\frac{3}{4}\gamma_1AB^2\sin(3\psi-\varphi)+$$
$$+\frac{1}{4}\varepsilon\gamma_2\omega AB^2\cos(3\psi-\varphi)=0, \tag{15}$$
$$A\left[\alpha-9\omega^2+\frac{3}{4}\gamma_1(A^2+2B^2)\right]-\frac{1}{4}\gamma_1B^3\cos(3\psi-\varphi)-$$
$$-\frac{1}{4}\varepsilon\gamma_2\omega B^3\sin(3\psi-\varphi)=R\cos\varphi,$$
$$3A\omega\left[k-\varepsilon\beta-\frac{1}{4}\varepsilon\gamma_2(A^2+2B^2)\right]-\frac{1}{4}\gamma_1B^3\sin(3\psi-\varphi)+$$
$$+\frac{1}{4}\varepsilon\gamma_2\omega B^3\cos(3\psi-\varphi)=-R\sin\varphi.$$

Отсюда видно, что искомое решение разбивается на два решения. Одно из них получим из уравнений

$$B=0,$$

$$A(\alpha - 9\omega^2) + \frac{3}{4}\gamma_1 A^3 = R\cos\varphi, \tag{16}$$

$$3\omega A\left(k - \varepsilon\beta - \frac{1}{4}\varepsilon\gamma_2 A^2\right) = -R\sin\varphi.$$

Это решение точно совпадает с (4), т. е. с синусоидальным приближением. Сокращая первые два уравнения (15) на множитель $B$, введя обозначения $A/B = p$, $\varphi - 3\psi = \delta$ и поступая так же, как в первом случае, получаем

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{\omega(k - \varepsilon\beta)}{\alpha - \omega^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \xi < \frac{\pi}{2},$$

$$3\gamma_1 p\sin(\delta - \xi) - \varepsilon\gamma_2\omega p\cos(\delta - \xi) + (1 + 2p^2)(\varepsilon\gamma_2\omega\cos\xi + 3\gamma_1\sin\xi) = 0,$$

$$B^2 = \frac{4\omega(k - \varepsilon\beta)}{3\gamma_1 p\sin\delta + \varepsilon\gamma_2\omega(2p^2 + 1 - p\cos\delta)}, \tag{17}$$

$$Bp(\alpha - 9\omega^2) + \frac{3}{4}B^3\left(\gamma_1 p^3 + 2\gamma_1 p - \frac{1}{3}\gamma_1\cos\delta + \frac{1}{3}\varepsilon\gamma_2\omega\sin\delta\right) = R\cos\varphi,$$

$$\omega p(k - \varepsilon\beta)\left[3p + \frac{\gamma_1\sin\delta - 3\varepsilon\gamma_2\omega\left(p^3 + 2p - \frac{1}{3}\cos\delta\right)}{3\gamma_1 p\sin\delta + \varepsilon\gamma_2\omega(2p^2 + 1 - p\cos\delta)}\right] = -R\sin\varphi.$$

Теперь, задаваясь значениями $\omega$, $p$, по формулам (17) последовательно определяем $\xi$, $\delta$, $A$, $B$, $R$. Следовательно, при $m = 3$, $n = 1$ решения содержат в себе синусоидальное приближение как частный случай и несинусоидальное, определяемое из (17).

Как и раньше, рассмотрим те области, в которых полученное решение мало отличается от синусоидального приближения. Для этого случая $k$ мало, $\omega \neq \pm\sqrt{\alpha}$, $p$ мало. Тогда $\operatorname{tg}\xi$, $\sin\xi$ тоже малы. Так как

$$\sin\xi = \frac{\omega(k - \varepsilon\beta)}{\sqrt{(\alpha - \omega^2)^2 + \omega^2(k - \varepsilon\beta)^2}},$$

и $\sin(\delta - \xi) \approx 0$, то $\sin\delta \approx \sin\xi$.

Аналогично первому случаю получим

$$p = \frac{[4k - \varepsilon(4\beta + \gamma_2 B^2)]\cdot\sqrt{(\alpha - \omega^2)^2 + \omega^2(k - \varepsilon\beta)^2}}{B^2[3\gamma_1 k - \varepsilon(3\beta\gamma_1 + \gamma_2(\alpha - \omega^2))]}, \tag{18}$$

$$B^3 = \frac{4R\cos\varphi\sqrt{(\alpha - \omega^2)^2 + \omega^2(k - \varepsilon\beta)^2}}{\gamma_1(\omega^2 - \alpha) + \varepsilon\gamma_2 k\omega^2}. \tag{19}$$

На основании (18) и (19) находим значение $A$.

Отметим некоторые свойства системы (17).

а) Система не может быть удовлетворена при $B = 0$, т. е. решение (17) не имеет общих точек с синусоидальным приближением.

б) Для каждого $k$ существует предельное значение $\omega$, ниже которого система (17) не имеет решений.

3) $m = 1$, $n = 2$, $2m = n$, $|m - n| = m$, $|2m - n| = 0$. В этом случае рассматривается уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{\partial t} + (\alpha + \gamma_1 x^2)x = \varepsilon(\beta + \gamma_2 x^2)\frac{dx}{\partial t} + R\sin\omega t. \tag{20}$$

Здесь $C \neq 0$ Поэтому приближенное решение ищется в виде

$$x = C + A\sin(\omega t + \varphi) + B\sin(2\omega t + \psi) \tag{21}$$

Поступая аналогично предыдущим случаям, обнаружим, что искомое решение разбивается на два решения. Одно из них точно совпадает с (4), что дает часть ветвей общего решения получаемого уравнения. Другое решение получим из следующей системы уравнений

$$\operatorname{tg}\xi = \frac{2\omega(k - \varepsilon\beta)}{\alpha - 4\omega^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \xi < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{3}{2}\gamma_1 q\cos(\delta - \xi) + \varepsilon\gamma_2\omega q\sin(\delta - \xi) + p\left(2q^2 + \frac{1}{2}p^2 + 1\right) \times$$
$$\times\left(\frac{3}{2}\gamma_1\sin\xi + \varepsilon\gamma_2\omega\cos\xi\right) = 0,$$

$$A^2 = \frac{2p\omega(k - \varepsilon\beta)}{\frac{3}{2}\gamma_1 q\cos\delta + \varepsilon\gamma_2\omega\left[\left(2q^2 + \frac{1}{2}p^2 + 1\right)p + q\sin\delta\right]}, \tag{22}$$

$$A(\alpha - \omega^2) + 3\gamma_1 q^2 A^3 + \frac{3}{4}\gamma_1 A^3(1 + 2p^2) + 3pqA^3(\varepsilon\gamma_2\omega\cos\delta +$$
$$+ \gamma_1\sin\delta) = R\cos\varphi,$$

$$q\alpha + \frac{3p\gamma_1\omega(k - \varepsilon\beta)\left[(1 + p^2) + \frac{1}{2}p\sin\delta - \frac{2}{3}q^2\right]}{\frac{3}{2}\gamma_1 q\cos\delta + \varepsilon\gamma_2\omega\left[\left(2q^2 + \frac{1}{2}p^2 + 1\right)p + q\sin\delta\right]} = 0,$$

$$\omega A(k - \varepsilon\beta)\left[1 + \frac{6p^2 q\gamma_1\cos\delta - 2\varepsilon p\gamma_2\omega\left[q^2 + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{4} + 3pq\sin\delta\right]}{\frac{3}{2}\gamma_1 q\cos\delta + \varepsilon\gamma_2\omega\left|p\left(2q^2 + \frac{1}{2}p^2 + 1\right) + q\sin\delta\right|}\right] =$$
$$= -R\sin\varphi,$$

где

$$\frac{C}{A} = q, \quad \frac{B}{A} = p, \quad 2\varphi - \psi = \delta$$

Однако исследование колебаний системы с трением по уравнениям (22) значительно сложнее, чем в остальных случаях, рассмотренных выше. Поэтому здесь ограничимся рассмотрением случая, когда $k$, $C$, $A$ малы и $B \gg A$. Задавая значения $\omega$, $p$, $q$, по формулам (22) определяем $\xi$, $\delta$, $A$, $B$, $C$.

Следовательно, при $m=1$, $n=2$ решения содержат в себе синусоидальное приближение и не синусоидальное, определяемое из уравнения (22).

4) $m = 2$, $n = 1$, $2n = m$, $|m - n| = n$, $|m - 2n| = 0$. В этом случае приближенное решение уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\frac{dx}{dt} + (\alpha + \gamma_1 x^2)x = \varepsilon(\beta + \gamma_2 x^2)\frac{dx}{dt} + R\sin 2\omega t \tag{23}$$

ищется в виде

$$x = C + A \sin(2\omega t + \varphi) + B \sin(\omega t + \psi). \tag{24}$$

Исследуя данный случай аналогично предыдущим, приходим к заключению, что в этом случае решения тоже состоят из двух частных решений.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Физматгиз, 1958.
2. А. И. Лурье и А. И. Чекмарев, Вынужденные колебания в нелинейной системе, ПММ, т. I, вып. 3, 1938.
3. А. М. Кац, О вынужденных колебаниях. Труды Ленинградского индустриального института, № 3, 1939.
4. А. М. Кац, Бигармонические колебания диссипативной нелинейной системы, вызываемые или поддерживаемые гармонической возмущающей силой, ПММ, т. 18, вып. 4, 1954.
5. Е. П. Попов и И. П. Пальтов, Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем, Физматгиз, 1960.
6. R. Skalak, M. I. Yarymovych, Subharmonic oscillations of a pendulum, J. Appl. Mech., Ser. E, № 1, 1960.



Поступила 13.III 1962 г.
Киев