3. Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, О приложении метода наименьшего спуска к доказательству некоторых асимптотических неравенств, Наукові записки КДУ, т. IV, вып. 5, 1939, 221—250.

4. Т. В. Морозова, Метод наименьшего спуска в теории статистического равновесия, Изд-во КГУ, Киев, 1957, 40.

5. Т. Хилл, Статистическая механика, М., 1960, 485.

Поступила 10.X 1961 г.
Киев

Об одной предельной теореме теории массового обслуживания

С. М. Броди

В этой заметке мы докажем предельную теорему в случае большой загрузки обслуживающего прибора для процесса $\eta(t)$ — времени ожидания требования, поступившего на обслуживание в момент t, подробно изученного в работе Такача [1].

Предположим, что к одному обслуживающему прибору поступают требования в моменты $0 < t_1 < t_2 \ldots < t_n$ и что случайный процесс $\{t_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ является пуассоновским с параметром λ (простейший поток), а длительности обслуживания $\{\gamma_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ соответствующих требований—независимые, одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $P\{\gamma_i \leqslant x\} = H(x)$, с конечным математическим ожиданием $\mu = \int\limits_0^\infty x dH(x) < \infty$. Требования обслуживаются в порядке поступления. Если прибор свободен, то требование немедленно обслуживается, а если занят, то требование становится в очередь. При этих предположениях случайный процесс $\eta(t)$ является однородным марковским процессом, который в моменты t_i имеет скачки величиной γ_i, а в промежутке времени $t_i - t_{i-1}$ линейно убывает с угловым коэффициентом -1 однако, достигнув значения нуль, процесс сохраняет его до момента поступления очередного требования.

Таким образом,

$$\eta(t) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \eta(t_i) - (t - t_i), & \text{если} \quad \eta(t_i) > t - t_i, \\ 0, & \text{если} \quad \eta(t_i) \leqslant t - t_i, \end{array}\right\} \text{ при } t \neq t_i, \\ \eta(t_i - 0) + \gamma_i \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } t = t_i. \end{cases}$$

Вкратце напомним некоторые результаты статьи [1], которые нам понадобятся в дальнейшем.

Пусть $P\{\eta(t) \leqslant x\} = F(t, x)$, $P\{\eta(t) \leqslant 0\} = F(t)$ и

$$\widetilde{F}(t, s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} d_x F(t, x), \; F^*(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt, \; \widetilde{H}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} dH(x).$$

Теорема 1.

$$\widetilde{F}(t, s) = e^{\{s - \lambda[1 - \widetilde{H}(s)]\}t} \left[1 - s \int\limits_0^t e^{-\{s - \lambda[1 - \widetilde{H}(s)]\}u} F(u)\, du\right]. \tag{1}$$

Теорема 2. *Если $\varrho = \lambda\mu < 1$, то предельное распределение $\lim\limits_{t\to\infty} F(t,x) = F_1(x)$ существует и не зависит от начального распределения $F_0(x)$ и $\widetilde{F}_1(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} dF_1(x)$ однозначно определяется формулой*

$$\widetilde{F}_1(s) = \frac{1-\varrho}{1-\lambda\dfrac{1-\widetilde{H}(s)}{s}}.$$

Если $\varrho \geqslant 1$, *то предельное распределение* $F_1(x)$ *не существует и* $\lim\limits_{t\to\infty} F(t, x) = 0$ *для любых* x.

Прежде чем сформулировать следующий ниже результат из [1], заметим, что время работы прибора состоит из промежутков, когда прибор свободен, и промежутков непрерывной работы прибора, так называемых периодов занятости. Пусть $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ и $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$ — длительности последовательных промежутков, когда прибор свободен, и соответственно последовательность периодов занятости. Очевидно, что $\{\tau_i\}$ и $\{\delta_i\}$ — последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин и

$$P\{\tau_i \leqslant x\} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Пусть $P\{\delta_i \leqslant x\} = G(x)$. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Преобразование Лапласа — Стильтьеса* $\widetilde{G}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-sx} \times$ $\times\, dG(x)$ *есть однозначно определенное аналитическое решение функционального уравнения*

$$\widetilde{G}(s) = \widetilde{H}\{s + \lambda[1 - \widetilde{G}(s)]\}$$

для $\operatorname{Re} s > 0$ *и* $\widetilde{G}(s)$ *удовлетворяет условию* $\widetilde{G}(\infty) = 0$.

Если p *— наименьший положительный корень уравнения*

$$\widetilde{H}[\lambda(1 - x)] = x,$$

то $\lim\limits_{x\to\infty} G(x) = p$.

Если $\varrho \leqslant 1$, *то* $p = 1$ *и* $G(x)$ *является собственной функцией распределения.*

Если $\varrho > 1$, *то* $p < 1$.

Теорема 4. $F^*(s)$ *определяется однозначно формулой*

$$F^*(s) = \frac{1}{s + \lambda[1 - \widetilde{G}(s)]}, \text{ если } F(0) = 1.$$

Как видно из теоремы 2, марковский процесс $\eta(t)$ является эргодическим при $\varrho < 1$, т. е. существует $\lim\limits_{t\to\infty} F(t, x) = F_1(x)$, где $F_1(x)$ — собственная функция распределения, преобразование Лапласа — Стильтьеса которой равно $\widetilde{F}_1(s)$. В случае, когда $\varrho = 1$, $\lim\limits_{t\to\infty} F(t, x) = 0$ при всех x.

Таким образом, при $t \to \infty$ время ожидания $\eta(t)$ сходится по вероятности к ∞. Однако при надлежащем нормировании можно получить асимптотическое поведение процесса $\eta(t)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5 (основная). *Если* $\varrho = 1$ *и* $\sigma^2 = \widetilde{H}''(0) < \infty$, *то*

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{\eta(t)}{\sqrt{t}} < x\right\} = \Phi(x)$$

равномерно по всем x, *где* $\Phi(x) = \sqrt{\dfrac{2\sigma^2}{\pi\mu}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{\sigma^2 z^2}{2\mu}}\, dz$.

Следующие две леммы нам понадобятся для доказательства теоремы 5.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\varrho < 1$ и $\sigma^2 < \infty$.

Лемма 1. *Уравнение* $\widetilde{G}(s) = \widetilde{H}\{s + \lambda[1 - \widetilde{G}(s)]\}$ *имеет следующее асимптотическое решение*

$$\widetilde{G}(s) = 1 - \sqrt{\frac{2\mu^3}{\sigma^2} s} + o(\sqrt{s})$$

при $s \to 0$.

Доказательство. Из теоремы 3 следует что $z(s) = s + \lambda[1 - \widetilde{G}(s)] = 0$ при $s = 0$, следовательно, мы можем разложить в ряд правую часть в окрестности $z(s) = 0$:

$$\widetilde{G}(s) = 1 - \mu\{s + \lambda[1 - \widetilde{G}(s)]\} + \sigma^2 \frac{\{s + \lambda[1 - \widetilde{G}(s)]\}^2}{2} + \\ + o\{s + \lambda[1 - \widetilde{G}(s)]\}^2,$$

откуда получим

$$\frac{\sigma}{\sqrt{2}}\left[s + \frac{1 - \widetilde{G}(s)}{\mu}\right] = \sqrt{\mu s\left\{1 + o\left(\frac{1}{\mu s}\left[s + \frac{1 - \widetilde{G}(s)}{1}\right]^2\right)\right\}},$$

$$\widetilde{G}(s) = 1 - \sqrt{\frac{2\mu^3 s}{\sigma^2}} + o(\sqrt{s}).$$

Лемма 2. *Справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{2\mu\pi t}{\sigma^2}}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) \text{ при } t \to \infty.$$

Доказательство. Из теоремы 4 и леммы 2 получаем $sF^*(s) = \sqrt{\frac{s\sigma^2}{2\mu}} + o(\sqrt{s})$ при $s \to 0$. Используя теорему Таубера [2, стр. 182], находим асимптотику для $F(t)$ при $t \to \infty$.

Доказательство теоремы 5. Введем обозначение $\alpha(t, s) = t\{s - \lambda[1 - \widetilde{H}(s)]\}$. Тогда формула (1) примет вид

$$\widetilde{F}(t, s) = e^{\alpha(t,s)}\left[1 - s\int_0^t e^{-\alpha(u,s)} F(u)\, du\right]. \tag{1'}$$

Нужно доказать, что

$$\lim_{t\to\infty} \widetilde{F}\left(t, \frac{s}{\sqrt{t}}\right) = \widetilde{\Phi}(s),$$

где

$$\widetilde{\Phi}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, d\Phi(x).$$

Из (1') получаем

$$\widetilde{F}\left(t, \frac{s}{\sqrt{t}}\right) = e^{\alpha\left(t, \frac{s}{\sqrt{t}}\right)}\left[1 - \frac{s}{\sqrt{t}}\int_0^t e^{-\alpha\left(u, \frac{s}{\sqrt{t}}\right)} F(u)\, du\right].$$

Рассмотрим $\widetilde{F}\left(t, \frac{s}{\sqrt{t}}\right)$ для больших значений t. Выберем некоторое фиксированное большое значение $t_0 = T$. Тогда для достаточно больших $t > T$

$\widetilde{F}\left(t, \frac{s}{\sqrt{t}}\right)$ можно переписать в виде

$$\widetilde{F}\left(t, \frac{s}{\sqrt{t}}\right) = e^{\frac{\sigma^2 s^2}{2\mu}+o(1)}\left\{1 - \frac{s}{\sqrt{t}}\left[\int_0^T e^{-\frac{\sigma^2 s^2 u}{2\mu t}+o(1)} F(u)\,du + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_T^t e^{-\frac{\sigma^2 s^2 u}{2\mu t}+o(1)} \frac{1+o(1)}{\sqrt{\frac{2\pi\mu u}{\sigma^2}}}du\right]\right\}.$$

Ввиду того что $F(0) = 1$ и $F(u) < 1$,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{s}{\sqrt{t}} \int_0^T e^{-\frac{\sigma^2 s^2 u}{2\mu t}+o(1)} F(u)\,du = 0.$$

Тогда

$$\lim_{t\to\infty} \widetilde{F}\left(t, \frac{s}{\sqrt{t}}\right) = \lim_{t\to\infty} e^{\frac{\sigma^2 s^2}{2\mu}+o(1)}\left[1 - \frac{s}{\sqrt{t}}\int_T^t e^{-\frac{\sigma^2 s^2 u}{2\mu t}+o(1)} \frac{1+o(1)}{\sqrt{\frac{2\pi\mu u}{\sigma^2}}}du\right] =$$

$$= e^{\frac{\sigma^2 s^2}{2\mu}} \lim_{t\to\infty}\left[1 - \sigma\frac{\sqrt{2}}{\pi\mu}\int_{\frac{s\sqrt{T}}{t}}^{s} e^{-\frac{\sigma^2 z^2}{2\mu}} dz\right] = e^{\frac{\sigma^2 s^2}{2\mu}}\left[1 - \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi\mu}}\int_0^s e^{-\frac{\sigma^2 z^2}{2\mu}} dz\right].$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} \widetilde{F}\left(t, \frac{s}{\sqrt{t}}\right) = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi\mu}}\, e^{\frac{\sigma^2 s^2}{2\mu}} \int_s^\infty e^{-\frac{\sigma^2 z^2}{2\mu}} dz. \qquad (2)$$

Нетрудно убедиться, что выражение (2) является преобразованием Лапласа — Стильтьеса для

$$\Phi(x) = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi\mu}}\int_0^x e^{-\frac{\sigma^2 u}{2\mu}} du.$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Takács, Investigation of waiting time problems by reduction to Markov processes, Acta math. Acad. scient. hung., VI, 1—2, 1955.

2. D. V. Widder, The Laplace transform, Princeton, 1946.

Поступила 20.VI 1962 г.

Киев

Об одном методе решения фильтрационных задач

А. А. Глущенко

Решение многих важных инженерных задач теории фильтрации удается получить точными аналитическими методами (например, методом конформных отображений). Однако доведение до числа таких решений чисто аналитическим путем часто связано с большими, а иногда и, вообще,