Решение обобщенной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием задач Коши

В. Е. Шаманский

В настоящей статье излагается метод решения задачи интегрирования системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений при условиях, связывающих искомые функции не только в граничных, но и во внутренних точках промежутка интегрирования. Метод итерационного типа основан на построении последовательности решений задач Коши, сходящейся к решению рассматриваемой обобщенной краевой задачи.

Пусть

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x \tag{1}$$

— система дифференциальных уравнений, определенная на промежутке $[l_0, l_m]$. Здесь $A(t)$ — квадратная матрица N-го порядка с интегрируемыми элементами, $x(t)$ — N-мерный вектор. Разобьем промежуток $[l_0, l_m]$ точками $l_1, l_2, \dots, l_{m-1}$ на m частей и обозначим через $x_k(t)$ решение системы (1) на промежутке $[l_{k-1}, l_k]$. Присоединим к системе (1) дополнительные условия:

$$\sum_{k=1}^{m} [B_{sk}\, x_k(l_{k-1}) + C_{sk}\, x_k(l_k)] = f_s \qquad (s = 1, 2, \dots, m), \tag{2}$$

где B_{sk}, C_{sk} — заданные постоянные квадратные матрицы N-го порядка, а f_s — N-мерные векторы. Условия (2) допускают разрывы решения $x(t)$ в точках l_k. Задачу решения системы (1) при условиях (2) будем называть обобщенной краевой задачей.

Построим метод решения этой задачи, промежуточный между методом сведения к решению последовательности задач Коши и разностным методом решения краевой задачи. Если решения задач Коши имеют тенденцию к накоплению погрешностей при пошаговом счете, то нужно выбирать вариант метода более близкий к разностному; если задачи Коши считаются без заметного накопления погрешностей, то тогда следует предпочитать вариант сведения к задачам Коши.

Итак, возьмем промежуток $[l_{k-1}, l_k]$ и разобьем его точками $l_{k-1} = \tau_{k,0}$; $\tau_{k,1}$; $\tau_{k,2}; \dots; \tau_{k,2r} = l_k$ на $2r$ частей. Вообще говоря, r может зависеть от

k, но для упрощения изложения будем считать, что каждый из промежутков $[l_{k-1}, l_k]$ разбивается на одинаковое количество частей. Примем точки τ_{ki} с нечетным вторым индексом за начальные точки интегрирования. Обозначим начальные значения решений в этих точках через $x^0_{k,2i-1}$. Можно найти решения задач Коши на промежутках $[\tau_{k,2i-2}, \tau_{k,2i}]$ $(i = 1, 2, \ldots, r;\ k = 1, 2, \ldots, m)$ с этими начальными условиями, интегрируя систему (1) с каждой точки $\tau_{k,2i-1}$ вправо и влево на длину одного промежутка $[\tau_{k,2i-2}, \tau_{k,2i-1}]$, $[\tau_{k,2i-1}, \tau_{k,2i}]$. Обозначим через $x_{k,2i-1}(t)$ решение задачи Коши на промежутке $[\tau_{k,2i-2}, \tau_{k,2i}]$, полученное указанным выше способом. Это решение будет совпадать с решением обобщенной краевой задачи (1), (2), если $x^0_{k,2i-1}$ таковы, что кроме условий (2) будут удовлетворяться еще условия склеивания в точках с четным вторым индексом:

$$x_{k,2i-1}(\tau_{k,2i}) = x_{k,2i+1}(\tau_{k,2i}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m;\ i = 1, 2, \ldots, r-1).$$

Чтобы найти $x^0_{k,2i-1}$, построим итерационный процесс для последовательности векторов $\overset{0}{x}{}^{(n)}_{k,2i-1}$, так что

$$x^0_{k,2i-1} = \lim_{n\to\infty} \overset{0}{x}{}^{(n)}_{k,2i-1}.$$

Всего нужно найти rm векторов $x^0_{k,2i-1}$. Это количество зависит от числа разбиений каждого из промежутков $[l_{k-1}, l_k]$. Поэтому количество разбиений $2r$ нужно делать как можно меньшим, если численное решение задач Коши для системы (1) не имеет сильно выраженной тенденции к накоплению погрешностей. Отметим, что разбиение каждого из отрезков $[l_{k-1}, l_k]$ на две части не увеличивает количества разыскиваемых величин против минимально возможного, но значительно сокращает накопленную к концу интегрирования погрешность при решении задач Коши.

Введем некоторые обозначения. Пусть $\Phi_{k,2i-1}(t)$ — такая фундаментальная матрица решений системы (1) на промежутке $[l_0, l_m]$, что $\Phi_{k,2i-1}(\tau_{k,2i-1}) = E$ $(k = 1, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, r)$, где E — единичная матрица. Матрицы $\Phi_{k,2i-1}(t)$ удовлетворяют матричному уравнению

$$\frac{d\,\Phi_{k,2i-1}}{dt} = A(t)\,\Phi_{k,2i-1}$$

на промежутке $[l_0, l_m]$. Составим клеточную матрицу

$$K = \begin{pmatrix} D_{11}\, D_{12} \ldots D_{1m} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ D_{m1}\, D_{m2} \ldots D_{mm} \end{pmatrix},$$

где D_{ik}, в свою очередь, клеточные матрицы:

$$D_{kk} = \begin{pmatrix} B_{kk}\Phi_{k1}(\tau_{k,0}) & 0 & 0 \ldots 0 & 0 & C_{kk}\Phi_{k,2r-1}(\tau_{k,2r}) \\ \Phi_{k1}(\tau_{k,2}) - \Phi_{k3}(\tau_{k,2}) & 0 \ldots 0 & 0 & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 & \Phi_{k,2r-3}(\tau_{k,2r-2}) - & \Phi_{k,2r-1}(\tau_{k,2r-2}) \end{pmatrix},$$

$$\underset{i \neq k}{D_{ik}} = \left.\begin{pmatrix} B_{ik}\Phi_{k1}(\tau_{k,0}) & 0 \ldots 0 & C_{ik}\Phi_{k,2r-1}(\tau_{k,2r}) \\ 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 \ldots 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} r \text{ строк},$$

и введем rmN-мерные векторы

$$u = \{x_{11}^0, x_{13}^0, \dots, x_{1,2r-1}^0; \dots; x_{m,1}^0, x_{m,2}^0, \dots, x_{m,2r-1}^0\},$$

$$g = \{f_1, 0, \dots, 0; \dots; f_m, 0, \dots, 0\}.$$

Тогда условия (2) вместе с условиями склеивания можно записать в виде следующего матричного равенства

$$Ku = g. \tag{3}$$

Решение рассматриваемой обобщенной краевой задачи теперь можно получить, решив систему линейных алгебраических уравнений (3), а затем ряд задач Коши для системы (1) при начальных условиях, задаваемых найденным вектором u. Здесь рассмотрим такой способ решения системы (3), при котором не нужно знать в явном виде матрицу K. За основу будет принята одна из вычислительных схем метода сопряженных градиентов (см. [1]). В наших обозначениях эта вычислительная схема запишется так:

начало процесса: $z_{-1} = 0;\ (r_{-1}, r_{-1}) = 1$[1];

основной цикл: $r_n = K u_n - g;$

$$\gamma_{n-1} = \frac{(r_n, r_n)}{(r_{n-1}, r_{n-1})} \qquad z_n = K^* r_n + \gamma_{n-1} z_{n-1};$$

$$\mu_n = \frac{(r_n, r_n)}{(z_n, z_n)}, \qquad u_{n+1} = u_n - \mu_n z_n. \tag{4}$$

Основная трудность применения этой вычислительной схемы заключается в выполнении операций $K u_n$ и $K^* r_n$, где звездочкой обозначена транспонированная матрица. Результат операции $K^* r_n$ можно получить, опираясь на следующую лемму.

Лемма. *Если $\Phi(t)$ — такая фундаментальная матрица решений системы (1), что $\Phi(\alpha_1) = E$ $(l_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant l_m)$, а $\Psi(t)$ — такая фундаментальная матрица решений системы $\frac{dx}{dt} = -A^*(t)\,x$, что выполняется условие $\Psi(\alpha_2) = E$ $(l_0 \leqslant \alpha_2 \leqslant l_m)$, то имеет место соотношение $\Psi(\alpha_1) = \Phi^*(\alpha_2)$.*

Доказательство. Матрица $(\Phi^*)^{-1}$ удовлетворяет матричному уравнению $\frac{d}{dt}(\Phi^*)^{-1} = -A^*(t)(\Phi^*)^{-1}$ и условию $(\Phi^*)^{-1}(\alpha_1) = E$. Действительно, дифференцируя соотношение $\Phi^*(\Phi^*)^{-1} = E$, получим

$$\frac{d}{dt}(\Phi^*)^{-1} = -(\Phi^*)^{-1}\frac{d\Phi^*}{dt}(\Phi^*)^{-1}.$$

Матрица $\Phi(t)$ удовлетворяет уравнению $\frac{d\Phi}{dt} = A(t)\,\Phi$, откуда $\frac{d\Phi^*}{dt} = \Phi^* A^*(t)$.

Подставляя последнее равенство в выражение для $\frac{d}{dt}(\Phi^*)^{-1}$, получим требуемое. Поэтому решение системы

$$\frac{dx}{dt} = -A^*(t)\,x \tag{5}$$

на промежутке $[l_0, l_m]$, удовлетворяющее начальному условию $x(\alpha_1) = x_1$, может быть представлено в виде $x(t) = (\Phi^*)^{-1}(t)\,x_1$ и, в частности, $x_2 = x(\alpha_2) = (\Phi^*)^{-1}(\alpha_2)\,x_1$. Отсюда $x_1 = \Phi^*(\alpha_2)\,x_2$.

---

[1] Круглыми скобками здесь и дальше обозначено скалярное произведение векторов.

Рассмотрим решение системы (5) $y(t)$, удовлетворяющее начальному условию $y(\alpha_2)=x_2$. Пусть $\Psi(t)$ — такая фундаментальная матрица решений системы (5), что $\Psi(\alpha_2)=E$. Тогда $y(t)=\Psi(t)\,x_2$. В силу единственности решения задачи Коши $x_1=\Psi(\alpha_2)\,x_2$. Сравнивая два выражения для x_1, получаем $\Psi(\alpha_1)=\Phi^*(\alpha_2)$.

Из доказанной леммы следует, что для отыскания значения $x_1=\Phi^*(\alpha_2)\,x_2$ необходимо проинтегрировать систему (5) при начальном условии $x(\alpha_2)=x_2$, тогда значение решения в точке α_1 даст искомую величину x_1.

Перейдем к изложению вычислительной схемы итерационного процесса.

В качестве начальных значений принимаем:

$$z_{k,2i-1}^{(-1)}=0;\ \sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{r}\|r_{k,2i-1}^{(-1)}\|^2=1 \quad (k=1,2,\ldots,m;\quad i=1,2,\ldots,r).$$

Основной цикл процесса строится так. Находим решения задач Коши:

$$\frac{d\,x_{k,2i-1}^{(n)}}{dt}=A(t)\,x_{k,2i-1}^{(n)};\qquad x_{k,2i-1}^{(n)}(\tau_{k,2i-1})=\overset{\circ}{x}{}_{k,2i-1}^{(n)} \tag{6}$$

на промежутках $\tau_{k,2i-2}\leqslant t\leqslant\tau_{k,2i}$ $(k=1,2,\ldots,m;\ i=1,2,\ldots,r)$.

Значения $\overset{\circ}{x}{}_{k,2i-1}^{(n)}$ при $n=0$ можно взять произвольными. Подсчитываем невязки:

$$\begin{gathered} r_{s,1}^{(n)}=\sum_{k=1}^{m}[B_{sk}\,x_{k,1}^{(n)}(l_{k-1})+C_{sk}\,x_{k,2r-1}^{(n)}(l_k)]-f_s,\\ r_{s,2i+1}^{(n)}=x_{s,2i-1}^{(n)}(\tau_{s,2i})-x_{s,2i+1}^{(n)}(\tau_{s,2i})\quad (i=1,2,\ldots,r-1;\ s=1,2,\ldots,m) \end{gathered} \tag{7}$$

и определяем коэффициент γ_{n-1}:

$$\gamma_{n-1}=\frac{\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{r}\|r_{k,2i-1}^{(n)}\|^2}{\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{r}\|r_{k,2i-1}^{(n-1)}\|^2}, \tag{8}$$

где вертикальными черточками обозначена эвклидова норма вектора. Построим теперь вектор $\eta_n=K^*r_n$. Для этого найдем решения следующих задач Коши для системы (5):

$$\begin{gathered} \frac{d\xi_{k,0}^{(n)}}{dt}=-A^*(t)\,\xi_{k,0}^{(n)},\qquad \xi_{k,0}^{(n)}(\tau_{k,0})=-\sum_{i=1}^{m}B_{ik}^*\,r_{i,1}^{(n)},\qquad \tau_{k,0}\leqslant t\leqslant\tau_{k,1};\\ \frac{d\,\xi_{k,2i}^{(n)}}{dt}=-A^*(t)\,\xi_{k,2i}^{(n)},\ \ \xi_{k,2i}^{(n)}(\tau_{k,2i})=r_{k,2i+1}^{(n)},\ \ \tau_{k,2i-1}\leqslant t\leqslant\tau_{k,2i+1}\\ (i=1,2,\ldots,r-1);\\ \frac{d\,\xi_{k,2r}^{(n)}}{dt}=-A^*(t)\,\xi_{k,2r}^{(n)},\qquad \xi_{k,2r}^{(n)}(\tau_{k,2r})=\sum_{i=1}^{m}C_{ik}^*\,r_{i,1}^{(n)},\qquad \tau_{k,2r-1}\leqslant t\leqslant\tau_{k,2r}\\ (k=1,2,\ldots,m). \end{gathered} \tag{9}$$

По этим решениям подсчитываем векторы:

$$\eta_{k,2i-1}^{(n)}=\xi_{k,2i}^{(n)}(\tau_{k,2i-1})-\xi_{k,2i-2}^{(n)}(\tau_{k,2i-1}),\ z_{k,2i-1}^{(n)}=\eta_{k,2i-1}^{(n)}+\gamma_{n-1}\,z_{k,2i-1}^{(n)}$$

$$(k=1,2,\ldots,m;\ i=1,2,\ldots,r). \tag{10}$$

Тогда

$$\mu_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{r} \| r_{k,2i-1}^{(n)} \|^2}{\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{i=1}^{r} \| z_{k,2i-1}^{(n)} \|^2}. \tag{11}$$

Уточненные значения $\overset{\circ}{x}{}_{k,2i-1}^{(n+1)}$ по значениям $\overset{\circ}{x}{}_{k,2i-1}^{(n)}$ предыдущего цикла процесса определяются из равенства

$$\overset{\circ}{x}{}_{k,2i-1}^{(n+1)} = \overset{\circ}{x}{}_{k,2i-1}^{(n)} - \mu_n z_{k,2i-1}^{(n)}. \tag{12}$$

В формулах (6) — (12) индекс n пробегает значения $0, 1, 2, 3, \ldots$ Счет ведется до тех пор, пока величина $\max\limits_{k,i} \| \overset{\circ}{x}{}_{k,2i-1}^{(n+1)} - \overset{\circ}{x}{}_{k,2i-1}^{(n)} \|$ не станет достаточно малой. Если это случится при $n = \nu$, то решение задачи Коши (6) с начальным условием $\overset{\circ}{x}{}_{k,2i-1}^{(\nu+1)}$ можно принять за искомое решение обобщенной краевой задачи. При практическом применении вычислительной схемы (6) — (12) необходимо следить, чтобы решения задач Коши вычислялись как можно точнее. Также необходимо по возможности точнее вычислять коэффициенты μ_n и γ_{n-1}. Если не принять указанных мер, особенно при счете на вычислительных машинах с фиксированной запятой, то скорость сходимости рассматриваемого итерационного процесса может значительно замедлиться. Теоретически итерационный процесс (6) — (12) должен привести к точному решению не более чем за rmN циклов, если пренебречь вычислительными погрешностями, но во многих случаях при удачно выбранном начальном приближении $\overset{\circ}{x}{}_{k,2i-1}^{(0)}$ и хорошо обусловленной обобщенной краевой задаче процесс приводит к решению за небольшое число циклов.

Сходимость рассматриваемого итерационного процесса решения обобщенной краевой задачи следует из сходимости процесса (4), исследованного в [1], поэтому здесь мы приведем только формулировку основной теоремы о сходимости.

Теорема 1. *Если обобщенная краевая задача* (1), (2) *имеет решение* (*может и не единственное*), *то последовательность задач Коши* (6) *сходится с возрастанием n при произвольном выборе начальных векторов* $\overset{\circ}{x}{}_{k,2i-1}^{0}$ $(k=1, 2, \ldots, m;\ i=1, 2, \ldots, r)$ *к одному из решений исходной задачи.*

2. Среди итерационных процессов, допускающих представление вида

$$u_{n+1} = u_0 - P_n(K^*K)(Ku_0 - g),$$

где $P_n(\lambda)$ — *алгебраические полиномы n-й степени, итерационный процесс (6) — (12) наилучший в том смысле, что норма*

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{r} \| \overset{\circ}{x}{}_{k,\,2i-1}^{(n)} - x_{k,\,2i-1}^{0} \|^2$$

достигает минимума при каждом n как функция коэффициентов полинома $P_n(\lambda)$.

3. Если не учитывать погрешности вычислений, то итерационный процесс (6) — (12) приводит к точному результату при $n \leqslant rmN$.

Отметим, что в случае неединственности решения обобщенной краевой задачи итерационный процесс (6)—(12) позволяет получить одно из решений только при небольших rmN, так как в этом случае происходит значительное накопление погрешностей при счете. Увеличение числа rmN возможно при увеличении количества разрядов чисел, с которыми ведется счет.

Изложенная методика решения обобщенной краевой задачи (1), (2) применима и к более общим условиям, чем (2), например к таким:

$$\sum_{k=1}^{m} [B_{sk} x_k (l_{k-1}) + C_{sk} x_k (l_k) + \int_{l_{k-1}}^{l_k} a_{sk}(t) x_k(t)\, dt] = f_s, \ (s = 1, 2, \ldots, m),$$

где $a_{sk}(t)$ — скалярные функции.

Методы решения обобщенных краевых задач с помощью последовательностей задач Коши, рассмотренные здесь, могут быть применены в соответствующей трактовке и к решению разностных систем уравнений, получающихся при решении краевых задач для уравнений с частными производными методом сеток. Метод использования задач Коши экономит оперативную память вычислительной машины и, уменьшая количество разыскиваемых величин, упрощает решение краевой задачи. Правда, в применении к разностным уравнениям промежуток интегрирования для задач Коши во многих случаях не удается сделать достаточно длинным из-за сильного накопления погрешностей, но даже при промежутках интегрирования длиной в несколько шагов можно в три-четыре раза уменьшить объем используемой оперативной памяти машины.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Е. Шаманский, О некоторых вычислительных схемах итерационных процессов, Укр. матем. ж., т. XIV, № 1, 1962.

Поступила 23.XII 1960 г.
Киев