О параметрическом случайном воздействии на линейные и нелинейные колебательные системы

В. Г. Коломиец

Вопрос о параметрическом случайном возбуждении как в линейных, так и в нелинейных колебательных системах имеет практический интерес в ряде технических приложений.

Параметрические флуктуации играют особую специфическую роль. Под их воздействием система, находясь в устойчивом состоянии покоя, может возбудиться. Они могут также перевести возбужденную систему в устойчивое невозбужденное состояние, сорвав уже имеющиеся колебания. Вблизи критических состояний флуктуации снижают запас устойчивости системы и могут привести к параметрическому возбуждению. Параметрическое возбуждение может быть ограничено уменьшением интенсивностей флуктуаций и введением нелинейностей в систему. Исследование указанных задач сводится к определению различного рода статистических характеристик величин. В частности, сюда относится: нахождение спектральных плотностей величин, их среднее и среднеквадратичное значения, а также математическое ожидание числа превышений величинами заданного уровня в единицу времени. Для определения этих характеристик необходимо знание плотности распределения вероятностей. Можно показать, что затухание флуктуаций величин, характеризующих поведение колебательных систем, например амплитуд и фаз, имеет место в случае гладкой плотности распределения, имеющей один максимум.

Рассмотрение и учет параметрических флуктуаций осуществлено асимптотическим методом Н. М. Крылова — Н. Н. Боголюбова [1], который уже в первом приближении приводит к результатам, вполне удовлетворяющим потребностям практики. Исследование «упрощенных» уравнений проведено с помощью метода уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова [2, 4, 9, 10, 11].

1. Рассмотрим линейную колебательную систему, описываемую следующим дифференциальным уравнением [3]

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta[1 + \xi(t)]\frac{dx}{dt} + \omega^2[1 + \xi(t)] = 0, \tag{1}$$

где $\xi(t)$ — стационарный, нормальный случайный процесс с нулевым средним значением и автокорреляционной функцией вида

$$R_{\xi}(\tau) = S_0 \delta(\tau), \tag{2}$$

где S_0 — значение спектральной плотности $\xi(t)$.

Предполагается, что интенсивность параметрических флуктуаций S_0 невелика и не приводит к большим изменениям амплитуды и фазы в течение одного периода $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Медленное изменение амплитуды и фазы достигается при $S_0 \ll 1$ и $\delta \ll \omega$.

Если предположить, что $d\eta(t) = \xi(t)\,dt$, где $\eta(t)$ — винеровский процесс или процесс броуновского движения ($\mathbf{M}\eta(t) = 0$, $\mathbf{M}\eta^2(t) = S_0 t$), уравнение (1), используя фазовую плоскость (x, y), можно записать в виде

$$dx = y\,dt,$$
$$dy = -(2\delta y + \omega^2 x)\,dt - (2\delta y + \omega^2 x)\,d\eta(t). \tag{1'}$$

Уравнение (1) будет стохастическим дифференциальным уравнением, а его решение представляет собой на фазовой плоскости (x, y) двумерный марковский процесс, производная $\frac{dy}{dt}$ не существует и понимается в обобщенном смысле.

В работах К. Ито [5], И. И. Гихмана [6], А. В. Скорохода [7] рассматриваются стохастические уравнения для марковских процессов, устанавливаются теоремы существования и единственности решений этих уравнений.

Поскольку для нашего случая условия теорем существования и единственности выполнены, решение стохастического уравнения будет процессом Маркова.

Первым общим методом, применяемым к изучению марковских процессов, является метод дифференциальных уравнений для переходных вероятностных функций процесса, предложенный А. Н. Колмогоровым [8] в 1931 году. Для (1′) прямое уравнение Колмогорова имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} + y\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}[(-2\delta y - \omega^2 x)\,P] = \frac{S_0}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}[(2\delta y + \omega^2 x)^2 P]. \tag{3}$$

Решение уравнения (3) в общем случае затруднительно. Поэтому, следуя методу Н. М. Крылова — Н. Н. Боголюбова [1], решение дифференциального уравнения (1) в первом приближении ищем в виде

$$x = a(t)\cos\psi, \quad \frac{dx}{dt} = -\omega a(t)\sin\psi \qquad (\psi = \omega t + \theta(t)). \tag{4}$$

Рассматривая (4) как некоторую замену переменных, для a и θ получаем следующую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -2\delta a\sin^2\psi + a(\omega\sin\psi\cos\psi - 2\delta\sin^2\psi)\,\xi(t), \\ \frac{d\theta}{dt} &= -2\delta\sin\psi\cos\psi + (\omega\cos^2\psi - 2\delta\sin\psi\cos\psi)\,\xi(t), \end{aligned} \tag{5}$$

или

$$\begin{aligned} da &= -2\delta a\sin^2\psi\,dt + a(\omega\sin\psi\cos\psi - 2\delta\sin^2\psi)\,d\eta(t), \\ d\theta &= -2\delta\sin\psi\cos\psi\,dt + (\omega\cos^2\psi - 2\delta\sin\psi\cos\psi)\,d\eta(t). \end{aligned} \tag{5'}$$

Уравнения (5) или (5′) представляют собой систему стохастических дифференциальных уравнений, а ее решением является двумерный процесс Маркова.

Ввиду того, что второе уравнение (5) не зависит от a, решение его представляет собой одномерный процесс Маркова.

Плотность совместного распределения амплитуды и фазы будет удовлетворять такому уравнению Фоккера — Планка — Колмогорова:

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial a}(-2\delta a\sin^2\psi P)+\frac{\partial}{\partial\theta}(-2\delta\sin\psi\cos\psi P)=\frac{S_0}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2}[a^2\sin^2\psi\times\right.$$

$$\times(\omega\cos\psi-2\delta\sin\psi)^2P]+2\frac{\partial^2}{\partial a\partial\theta}[a\sin\psi\cos\psi(\omega\cos\psi-2\delta\sin\psi)^2P]+$$

$$\left.+\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}[\cos^2\psi(\omega\cos\psi-2\delta\sin\psi)^2P]\right\}. \tag{6}$$

Плотность распределения фазы удовлетворяет следующему уравнению

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\theta}(-2\delta\sin\psi\cos\psi W)=\frac{S_0}{2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}[\cos^2\psi(\omega\cos\psi-2\delta\sin\psi)^2W]. \tag{7}$$

Решение уравнений (6) и (7) в общем случае также затруднительно.

Поскольку a и θ — медленно изменяющиеся функции времени, то при решении уравнений (5) их можно считать постоянными в течение периода T.

Выполнив усреднение регулярных членов в (5) за период T при фиксированных значениях a и θ и представив случайные функции, входящие в (5), в виде [4]

$$\begin{aligned}(\omega\sin\psi\cos\psi-2\delta\sin^2\psi)\,\xi(t)&=m_1+\xi_1(t),\\(\omega\cos^2\psi-2\delta\sin\psi\cos\psi)\,\xi(t)&=m_2+\xi_2(t),\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$m_1=\overline{(\omega\sin\psi\cos\psi-2\delta\sin^2\psi)\,\xi(t)},$$

$$m_2=\overline{(\omega\cos^2\psi-2\delta\sin\psi\cos\psi)\,\xi(t)},$$

$$\xi_1(t)=(\omega\sin\psi\cos\psi-2\delta\sin^2\psi)\,\xi(t)-m_1,$$

$$\xi_2(t)=(\omega\cos^2\psi-2\delta\sin\psi\cos\psi)\,\xi(t)-m_2,$$

причем автокорреляционные функции случайных процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ предполагаются соответственно равными $R_{\xi_1}(\tau)=S_1\delta(\tau)-m_1^2$, $R_{\xi_2}(\tau)=S_2\delta(\tau)-m_2^2$, где S_1 и S_2 — спектральные плотности соответственно $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, получим «упрощенные» уравнения

$$\begin{aligned}du&=\left(m_1-\delta-\frac{1}{2}S_1\right)dt+d\eta_1(t),\\d\theta&=d\eta_2(t),\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$m_1=\left(\frac{\omega^2}{8}+\frac{\delta^2}{2}\right)S_0,\qquad m_2=0,$$

$$S_1=\left(\frac{\omega^2}{8}+\frac{3\delta^2}{2}\right)S_0,\quad S_2=\left(\frac{3\omega^2}{8}+\frac{\delta^2}{2}\right)$$

и $u=\ln a$ [5], $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ — процессы броуновского движения ($\mathbf{M}\eta_1=0$,

$\mathbf{M}\eta_2 = 0,\ M\eta_1^2 = S_1 t,\ M\eta_2^2 = S_2 t$). Коэффициенты m_1, m_2, S_1, S_2 определены по методу Р. Л. Стратоновича [12].

Исследование уравнений (9) осуществим путем перехода к уравнениям для плотностей распределения логарифма амплитуды и фазы.

Согласно первому уравнению (9) для изменяющейся во времени плотности распределения логарифма амплитуды $P(u, t)$ уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова имеет вид [2, 4, 9]

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \left(m_1 - \delta - \frac{1}{2} S_1\right) \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{S_1}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial u^2}. \tag{10}$$

Решение уравнения (10) при начальном условии $P(u, 0) = \delta(u)$ имеет вид

$$P(u, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi S_1 t}} \exp\left\{-\frac{\left[u - \left(m_1 - \delta - \frac{1}{2} S_1\right) t\right]^2}{2 S_1 t}\right\}. \tag{11}$$

С помощью формулы (11) легко вычисляются среднее и среднеквадратичное значения логарифма амплитуды:

$$\mathbf{M}u = \mathbf{M} \ln a = \int_{-\infty}^{\infty} u P(u, t)\, du = \left(m_1 - \delta - \frac{1}{2} S_1\right) t,$$

$$\mathbf{M}u^2 = \mathbf{M} \ln^2 a = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 P(u, t)\, du = S_1 t + \left(m_1 - \delta - \frac{1}{2} S_1\right)^2 t^2. \tag{12}$$

Из анализа формул (12) видно, что амплитуда будет сколь угодно большой при выполнении условия

$$m_1 - \frac{1}{2} S_1 > \delta \tag{13}$$

с вероятностью, стремящейся к единице, так как $\ln a \to +\infty$.

Следовательно, неравенство (13) является условием неустойчивости рассматриваемой системы или условием возбуждения колебаний под действием параметрических случайных сил.

При выполнении условия $m_1 - \frac{1}{2} S_1 < \delta$ амплитуда стремится к 0, что соответствует отсутствию колебаний, поскольку $\ln a \to -\infty$. Граница области возбуждения определяется соотношением $m_1 - \frac{1}{2} S_1 = \delta$. Таким образом, исследование параметрической системы на устойчивость сводится к вычислению m_1 и S_1.

Дифференциальное уравнение для плотности распределения фазы имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{S_2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2}. \tag{14}$$

Решение уравнения (14) известно:

$$P(\theta, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi S_2 t}} \exp\left\{-\frac{\theta^2}{2 S_2 t}\right\}. \tag{15}$$

С помощью (15)

$$\mathbf{M}\theta = 0,$$

$$\mathbf{M}\theta^2 = S_2 t. \tag{16}$$

Следовательно, здесь имеет место диффузионное расплывание фазы.
Интегрируя непосредственно систему уравнений (9), получаем

$$\begin{aligned} u &= \left(m_1 - \delta - \frac{1}{2} S_1\right) t + \int_0^t d\eta_1(t), \\ \theta &= \int_0^t d\eta_2(t). \end{aligned} \tag{17}$$

Анализ этих решений приводит к таким же результатам, что и метод уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова.

Таким образом, в линейных системах невозможен стационарный режим параметрических колебаний. Колебания в них будут или неограниченно возрастать или убывать до нуля. Однако в реальных системах невозможно беспредельное возрастание амплитуды колебаний. В них произойдет либо ограничение амплитуды нелинейностью, либо разрушение системы (флаттер крыла).

Вводя нелинейность в систему, можно вычислить стационарное распределение амплитуды.

2. Рассмотрим нелинейную колебательную систему вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\,[1 + \xi(t)]\,\frac{dx}{dt} + \omega^2\,[1 + \xi(t)]\,x = \varepsilon f\left(x, \frac{dx}{dt}\right), \tag{18}$$

где ε — малый положительный параметр, $\xi(t)$ — стационарный гауссовский случайный процесс типа «белого» шума с постоянной спектральной плотностью $S_0 \ll 1$, $\delta \ll \omega$. В то время как параметрические флуктуации приводят к параметрическому возбуждению системы, наличие слабой нелинейности в уравнении (18) приводит к ограничению роста амплитуды колебаний.

Предполагается, однако, что параметрические флуктуации таковы, что не приводят к большим изменениям амплитуды и фазы колебаний. Решение уравнения (19) представим в виде синусоиды с медленно изменяющимися амплитудой и фазой

$$\begin{gathered} x = a(t)\cos\psi, \quad \frac{dx}{dt} = -\,\omega a(t)\sin\psi \\ (\psi = \omega t + \theta(t)). \end{gathered} \tag{19}$$

Пользуясь известным методом Н. М. Крылова — Н. Н. Боголюбова [1] и учитывая (8), получаем систему «упрощенных» уравнений для определения a и θ:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\,\frac{\varepsilon}{\omega} A(a) - \delta a + m_1 a + a\xi_1(t), \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\,\frac{\varepsilon}{\omega} B(a) + m_2 + \xi_2(t), \end{aligned} \tag{20}$$

или

$$da = \left(-\,\frac{\varepsilon}{\omega} A(a) - \delta a + m_1 a\right) dt + a\,d\eta_1(t), \tag{20'}$$

$$d\theta = \left(-\frac{\varepsilon}{\omega} B(a) + m_2\right) dt + d\eta_2(t),$$

где

$$A(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi d\psi,$$

$$B(a) = \frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi d\psi,$$

$\eta_1(t)$, $\eta_2(t)$ — винеровские процессы, m_1, m_2, $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, S_1, S_2 такие, как и в (8).

Уравнения (20), (20′) представляют собой систему стохастических дифференциальных уравнений, а ее решением является марковский процесс, переходные вероятностные функции которого удовлетворяют уравнениям Колмогорова.

Согласно первому уравнению (20) уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова имеет вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\left\{\left[-\frac{\varepsilon}{\omega} A(a) - \delta a + m_1 a\right] P\right\} = \frac{S_1}{a} a^2 \frac{\partial^2 P}{\partial a^2}, \qquad (21)$$

где $P = P(a, t)$ — изменяющаяся со временем плотность распределения амплитуд.

Стационарное решение этого уравнения можно найти методом А. А. Андронова [2]. Оно будет иметь следующий аналитический вид

$$P(a) = Ca^{\frac{2(m_1-\delta)}{S_1}} \exp\left\{-\frac{2\varepsilon}{\omega S_1}\int \frac{A(a)}{a^2} da\right\}, \qquad (22)$$

где постоянная C определяется из условия нормирования

$$\int_0^\infty P(a)\, da = 1. \qquad (23)$$

Во второе уравнение входит амплитуда. Однако при малом статистическом разбросе амплитуды ее можно заменить стационарным значением, найденным из уравнения

$$-\frac{\varepsilon}{\omega} A(a) - \delta a + m_1 a = 0. \qquad (24)$$

Таким образом, изменение фазы здесь подчиняется так же диффузионному закону, как и в линейном случае, поскольку уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова вырождается в стандартное уравнение диффузии. Наличие стационарной плотности амплитуды подтверждает существование стационарных режимов параметрических колебаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958.
2. А. А. Андронов, Собр. трудов, Изд-во АН СССР, М., 1956.
3. Ю. М. Романовский, Изв. АН СССР. ОТН, механика и машиностроение, № 4, 1960.
4. Р. Л. Стратонович, Ю. М. Романовский, Научн. докл. высшей школы, физ.-матем. науки, № 3, 1958.
5. К. Ито, Математика, 1 : 1, 1957.

6. И. И. Гихман, УМЖ, т. 2 : 3, № 4, 1950.
7. А. В. Скороход, Сиб. матем. журн., т. 2, № 1, 1961.
8. А. Н. Колмогоров, УМН, вып. V, 1938.
9. В. Г. Коломиец, Укр. матем. журн., т. 14, № 2, 1962.
10. В. Г. Коломиец, Укр. матем. журн., т. 14, № 4, 1962.
11. В. Г. Коломиец, ДАН УРСР, № 11, 1962.
12. Р. Л. Стратонович, Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике, Изд. «Сов. радио», М., 1961.

Поступила 15.XII 1962 г.
Киев