О поведении в целом решений дифференциальных уравнений высшего порядка

А. М. Краснодембский

1. В настоящей заметке доказывается ряд теорем относительно поведения в целом решений дифференциальных уравнений высшего порядка. Близкие результаты для одного дифференциального уравнения первого порядка и системы дифференциальных уравнений первого порядка получены в работах [1—6].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$y_i' = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Пусть функции $f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в области V:

$$-\infty < x < \infty, \ a_i \leqslant y_i \leqslant b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

удовлетворяют условиям:

$$(a) \ f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, a_i, y_{i+1}, \ldots, y_n) \geqslant 0,$$

$$f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, b_i, y_{i+1}, \ldots, y_n) \leqslant 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

или

$$(a') \ f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, a_i, y_{i+1}, \ldots, y_n) \leqslant 0,$$

$$f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}, b_i, y_{i+1}, \ldots, y_n) \geqslant 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

$$(б) \quad f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in C \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

$$(в) \quad f_i(x + T, y_1, y_2, \ldots, y_n) \equiv f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

(*г*) обеспечена единственность решения системы (1).

Приведем ряд теорем для системы (1), которые нам понадобятся в дальнейшем.

Теорема 1. *При выполнении в области V условий* (*а*) (*или* (*а'*), (*б*), (*в*), (*г*) *система* (1) *имеет периодическое* (*периода T*) *решение в той же области.*

Доказательство. В силу условия (*а*), если $a_i \leqslant y_i(x_0) \leqslant b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то и при всех $x \geqslant x_0$ $a_i \leqslant y_i(x) \leqslant b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — решение системы (1).

Отображение L, ставящее в соответствие каждой точке $P_1(y_1(x_0), y_2(x_0), \ldots, y_n(x_0)) \in V_1$ точку $P_2(y_1(x_0 + T), y_2(x_0+T), \ldots, y_n(x_0 + T)) \in V_2$, где $V_1: x = x_0,\ a_i \leqslant y_i \leqslant b_i$; $V_2: x = x_0 + T,\ a_i \leqslant y_i \leqslant b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$, в силу условий (*б*), (*г*) является топологическим [7]. Так как область $V_1 (V_2)$ — выпуклое замкнутое компактное множество в n-мерном эвклидовом пространстве, то по принципу Шаудера [8] существует неподвижная точка отображения L.

Теорема доказана.

Теорема 2. *При выполнении в области V условий* (*а*) (*или* (*а'*)), (*б*), (*г*) *система* (1) *обладает решением, принадлежащим той же области при всех x.*

Доказательство. Используя известный метод (см., например, [1, 5]), разобьем область V_1:

$$x \leqslant x_0,\ a_i \leqslant y_i \leqslant b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

на части гиперплоскостями

$$x_m = x_0 - m \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Множества точек пересечения решений

$$y_i = y_i(x) \qquad (a_i \leqslant y_i(x_m) \leqslant b_i;\quad i = 1, 2, \ldots, n;\quad m = 1, 2, \ldots)$$

системы (1) с областью S_0:

$$x = x_0,\quad a_i \leqslant y_i < b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

обозначим через S_m $(m = 1, 2, \ldots)$. В силу условий (*а*), (*б*), (*г*) множества S_m $(m = 1, 2, \ldots)$ замкнутые в n-мерном эвклидовом пространстве. Так как в силу условия (*а*)

$$S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \ldots \supseteq S_m \supseteq \ldots,$$

то существует точка с координатами

$$y_i = y_{0i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

принадлежащая всем этим множествам.

Следовательно, решение

$$y_i = \overline{y_i}(x) \quad (\overline{y}_i(x_0) = y_{0i};\quad i = 1, 2, \ldots, n)$$

будет принадлежать области V при всех x.

Теорема доказана.

Лемма 1. *Пусть в области V существуют и конечны f'_{ij} $\left(f'_{ij} = \frac{df_i}{dy_j};\right.$ $\left. i, j = 1, 2, \ldots, n\right)$, удовлетворяющие условиям*

$$|f'_{ii}| \geqslant M_i q(x),\ |f'_{ij}| \leqslant N_{ij} q(x),\ \int\limits_{x_0}^{\pm\infty} q(x)\,dx = \pm\infty\ (i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j); \quad (2)$$

$$0 < \sum_{j=1 (j \neq i)} N_{ij} < M_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (2')$$

Тогда:

1) если в области V $f'_{ii} < 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и выполнены условия (*а*), (*б*), *то все решения системы* (1), *принимающие значение в области V, стремятся друг к другу при $x \to \infty$;*

2) если в области V $f'_{ii} > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и выполнены условия (*а'*), (*б*), *то все решения системы* (1), *принимающие значение в области V, стремятся друг к другу при $x \to -\infty$.*

Доказательство. 1) Пусть

$$y_i^{(1)} = y_i^{(1)}(x),\ y_i^{(2)} = y_i^{(2)}(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

— два решения системы (1) такие, что

$$y_i^{(1)}(x_0) = y_{i0}^{(1)},\ y_i^{(2)}(x_0) = y_{i0}^{(2)} \quad (a_i \leqslant y_{i0}^{(1)},\ y_{i0}^{(2)} \leqslant b_i; \quad i = 1, 2, \ldots, n).$$

Введем обозначения

$$y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x) = u_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\max\left[-M_1 + \sum_{j=2}^{n} N_{j1};\ -M_2 + \sum_{j=1 (j\neq 2)}^{n} N_{j2}; \ldots ; -M_n + \sum_{j=1}^{n-1} N_{jn}\right] = -\varepsilon.$$

Разделим интервал $[x_0, \infty)$ на интервалы $I_1, I_2 \ldots, I_n, \ldots$, в каждом из которых совокупность $u_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ сохраняет знак. Это возможно, поскольку $u_i(x)$, $u'_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ непрерывны и имеет место единственность решения системы (1) в области V.

По теореме Лагранжа функции $u_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$u'_i = \sum_{j=1}^{n} f'_{ij} u_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

где f'_{ij} — значения $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ в некоторых точках области V.

Легко доказать по индукции, что в каждом интервале $I_n = [x_{n-1}, x_n)$

$$\sum_{j=1}^{n} |u_i(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |u_i(x_0)| \exp\left[-\varepsilon \int_{x_0}^{x} q(x)\, dx\right].$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty} |y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x)| = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Доказательство 2) аналогично.

Лемма 2. *Пусть условия* (2), (б), *выполнены во всем пространстве* $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *и найдутся такие числа* $\beta_i > 0$, *что*

$$\sum_{j=1 (j\neq i)} \beta_j N_{ji} < \beta_i M_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда:

1) если $f'_{ii} < 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *то все решения системы* (1) *стремятся друг к другу при* $x \to \infty$;

2) *если* $f'_{ii} > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *то все решения системы* (1) *стремятся друг к другу при* $x \to -\infty$.

Доказательство. Введя новые переменные v_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ равенствами

$$v_i = \beta_i u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

приведем систему (3) к виду

$$v'_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_i}{\beta_j} f'_{ij} v_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы.

Используя теоремы 1,2 и леммы 1,2, легко доказать следующие теоремы.

Теорема 3. *Если выполнены предположения* 1) (*или* 2)) *леммы* 1 *и условие* (*в*), *то система* (1) *имеет в области* V *единственное периодическое решение, причем любое решение, принимающее значение в области* V, *системы* (1) *стремится к этому решению при* $x \to \infty$ *в предположениях* 1) *и при* $x \to -\infty$ *в предположениях* 2).

Теорема 4. *В предположениях* 1) (*или* 2)) *леммы* 1 *система* (1) *имеет единственное решение, принадлежащее области* V *при всех* x; *причем любое решение, принимающее значение в области* V *системы* (1) *стремится к этому решению при* $x \to \infty$ *в предположениях* 1) *и при* $x \to -\infty$ *в предположениях* 2).

Теорема 5. *В предположениях* 1) (*или* 2)) *леммы* 2, *если система* (1) *имеет периодическое решение, то оно единственно; причем все решения системы* (1) *стремятся к этому решению при* $x \to \infty$ *в предположениях* 1) *и при* $x \to -\infty$ *в предположениях* 2).

Теорема 6. *В предположениях* 1) (*или* 2)) *леммы* 2, *если система* (1) *имеет ограниченное решение при всех* x, *то оно единственно; причем все решения системы* (1) *стремятся к этому решению при* $x \to \infty$ *в предположениях* 1) *и при* $x \to -\infty$ *в предположениях* 2).

2. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y^{(n+1)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}). \tag{4}$$

Пусть функция $f(x, u_0, u_1, \ldots, u_n)$ во всем пространстве $(x, u_0, u_1, \ldots, u_n)$ удовлетворяет условиям:

(*А*) $f(x, u_0, u_1, \ldots, u_n) \in C$;

(*Б*) существуют конечные частные производные f'_{u_i} $(i=0, 1, \ldots, n)$;

(*В*) $f(x+T, u_0, u_1, \ldots, u_n) \equiv f(x, u_0, u_1, \ldots, u_n)$.

Введем новые переменные y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ равенствами

$$y^{(i)} = \alpha_i y_{i-1} + y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ y_0 = y).$$

Применяя теорему Лагранжа, заменим уравнение (4) системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&y' = \alpha_1 y + y_1,\\
&y_1' = -\alpha_1^2 y + (\alpha_2 - \alpha_1) y_1 + y_2,\\
&y_i' = (-1)^i \alpha_1^2 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_i y + (-1)^{i-1} \alpha_2 \ldots \alpha_i (\alpha_2 - \alpha_1) y_1 + \ldots +\\
&+ (\alpha_{i+1} - \alpha_i) y_i + y_{i+1} \qquad (i = 2, 3, \ldots, n-1),\\
&y_n' = [(-1)^n \alpha_1^2 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_n + f_0' + \alpha_1 f_1'] y + [(-1)^{n-1} \alpha_2 \ldots \alpha_n (\alpha_2 - \alpha_1) + f_1' + \alpha_2 f_2'] y_1 +\\
&+ \ldots + [-\alpha_n (\alpha_n - \alpha_{n-1}) + f_{n-1}' + \alpha_n f_n'] y_{n-1} + (-\alpha_n + f_n') y_n + g(x)
\end{aligned} \tag{5}$$

$(f_i' = f'_{u_i};\ \ i = 0, 1, \ldots, n;\ g(x) = f(x, 0, 0, \ldots, 0))$.

Пусть можно подобрать числа $d_0 > 0$, α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ так, что в области V:

$$-\infty < x < \infty, \qquad |y_i| \leqslant d_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

имеют место соотношения

$$\begin{aligned}
&0 < d_1 = |\alpha_1| d_0,\\
&0 < d_2 = -\alpha_1^2 d_0 + |\alpha_2 - \alpha_1| d_1,
\end{aligned} \tag{6}$$

$$0 < d_i = -[|\alpha_1^2 \cdot \alpha_2 \dots \alpha_{i-1}| d_0 + |\alpha_2 \dots \alpha_{i-1} (\alpha_2 - \alpha_1) d_1 + \dots +$$

$$+ |\alpha_{i-1} (\alpha_{i-1} - \alpha_{i-2})| d_{i-2}] + |\alpha_i - \alpha_{i-1}| d_{i-1} \qquad (i = 3, 4, \dots, n),$$

$$|(-1)^n \alpha_1^2 \alpha_2 \dots \alpha_n + f_0' + \alpha_1 f_1'| d_0 + |(-1)^{n-1} \alpha_2 \dots \alpha_n (\alpha_2 - \alpha_1) + f_1' + \alpha_2 f_2'| d_1 + \tag{7}$$

$$+ \dots + |-\alpha_n (\alpha_n - \alpha_{n-1}) + f_{n-1}' + \alpha_n f_n'| d_{n-1} \leqslant |f_n' - \alpha_n| d_n - |g(x)|.$$

$(f_n' < \alpha_n$ при $\alpha_n < 0$; $f_n' > \alpha_n$ при $\alpha_n > 0)$.

Тогда в области V система (5) удовлетворяет условию (a), если числа $\alpha_i < 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) и условию (a'), если числа $\alpha_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Итак, имеют место теоремы:

Теорема 7. *Если в пространстве* $(x, u_0, u_1, \dots, u_n)$ *выполнены условия* (A), ($Б$), ($В$) *и можно подобрать числа* $d_0 > 0$, $\alpha_i < 0$ (*или* $\alpha_i > 0$), ($i = 1, 2, \dots, n$) *таким образом, что при выполнении условий* (6) *выполняется условие* (7), *то уравнение* (4) *имеет периодическое* (*периода* T) *решение в области* U: $-\infty < x < \infty$, $|u_0| < d_0$, $|u_i| < |\alpha_i| d_{i-1} + d_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Теорема 8. *Если в пространстве* $(x, u_0, u_1, \dots, u_n)$ *выполнены условия* (A), ($Б$) *и можно подобрать числа* $d_0 > 0$, $\alpha_i < 0$ (*или* $\alpha_i > 0$), ($i = 1, 2, \dots, n$) *таким образом, что при выполнении условий* (6) *выполняется условие* (7), *то уравнение* (4) *имеет решение, принадлежащее области* U *при всех* x.

Замечание. В теоремах 7, 8 достаточно требовать выполнения условий (A), ($Б$) в области U.

Пусть

$$y_i^{(1)} = y_i^{(1)}(x), \qquad y_i^{(2)} = y_i^{(2)}(x) \qquad (i = 0, 1, \dots, n)$$

— два решения системы (5).

Обозначим

$$y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x) = \beta_i v_i(x) \qquad (i=0, 1, \dots, n;\ \beta_0 = 1).$$

Тогда функции $v_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) будут удовлетворять системе дифференциальных уравнений

$$v_0' = \alpha_1 v_0 + \beta_1 v_1,$$

$$v_1' = -\frac{\alpha_1^2}{\beta_1} v_0 + (\alpha_2 - \alpha_1) v_1 + \frac{\beta_2}{\beta_1} v_2,$$

$$v_i' = \frac{(-1)^i}{\beta_i} \alpha_1^2 \alpha_2 \dots \alpha_i v_0 + (-1)^{i-1} \frac{\beta_1}{\beta_i} \alpha_2 \dots \alpha_i (\alpha_2 - \alpha_1) v_1 + \dots + (\alpha_{i+1} - \alpha_i) v_i +$$

$$+ \frac{\beta_{i+1}}{\beta_i} v_{i+1} \qquad (i = 2, 3, \dots, n-1), \tag{8}$$

$$v_n' = \frac{1}{\beta_n} [(-1)^n \alpha_1^2 \alpha_2 \dots \alpha_n + f_0' + \alpha_1 f_1'] v_0 + \frac{\beta_1}{\beta_n} [(-1)^{n-1} \alpha_2 \dots \alpha_n (\alpha_2 - \alpha_1) +$$

$$+ f_1' + \alpha_2 f_2'] v_1 + \dots + \frac{\beta_{n-1}}{\beta_n} [-\alpha_n (\alpha_n - \alpha_{n-1}) + f_{n-1}' + \alpha_n f_n'] v_{n-1} + (f_n' - \alpha_n) v_n.$$

Для сокращения записи обозначим через a_{ij} ($i, j = 0, 1, \dots, n$) модули коэффициентов при v_j в $(i+1)$-м уравнении системы (8).

Пусть a_{ij} $(i, j = 0, 1, \ldots, n)$ удовлетворяют следующим соотношениям

$$\sum_{i=0(i\neq j)}^{n} a_{ij} < a_{jj} \qquad (j = 0, 1, \ldots, n;\ a_{ij} = 0 \text{ при } j \geqslant i + 2). \tag{9}$$

Используя изложенное выше, легко доказать следующие теоремы.

Теорема 9. *Если выполнены условия теоремы 7 и можно подобрать такие числа $\beta_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, что выполнено условие (9), то любое решение уравнения (4) стремится к единственному периодическому решению уравнения (4) при $x \to \infty$, если $\alpha_i < 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, и при $x \to -\infty$, если $\alpha_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.*

Теорема 10. *Если выполнены условия теоремы 8 и можно подобрать такие числа $\beta_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, что выполнено условие (9), то любое решение уравнения (4) стремится к единственному ограниченному при всех x решению уравнения (4) при $x \to \infty$, если $\alpha_i < 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, и при $x \to -\infty$, если $\alpha_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.*

3. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$y_i^{(m_i+1)} = f_i(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1)}; \ldots; y_n, y_n', \ldots, y_n^{(m_n)}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

Пусть функции $f_i(x, u_{10}, u_{11}, \ldots, u_{nm_n})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ во всем пространстве $(x, u_{10}, u_{11}, \ldots, u_{nm_n})$ удовлетворяют условиям:

(A') $f_i(x, u_{10}, u_{11}, \ldots, u_{nm_n}) \in C$ $\quad (i = 1, 2, \ldots, n)$;

$(Б')$ существуют конечные частные производные $f'_{iu_{kj}}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n;$ $j = 0, 1, \ldots, m_n)$;

(B') $f_i(x+T, u_{10}, u_{11}, \ldots, u_{nm_n}) \equiv f_i(x, u_{10}, u_{11}, \ldots, u_{nm_n})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Введем новые переменные y_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n;\ \ j = 1, 2, \ldots, m_i)$ равенствами

$$y_i^{(j)} = \alpha_{ij} y_{i,j-1} + y_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m_i;\ y_{i0} = y_i).$$

Применяя теорему Лагранжа, заменим систему (10) системой первого порядка

$$\begin{aligned}
&y_i' = \alpha_{i1} y_i + y_{i1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),\\
&y_{i1}' = -\alpha_{i1}^2 y_i + (\alpha_{i2} - \alpha_{i1}) y_{i1} + y_{i2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),\\
&y_{ik}' = (-1)^k \alpha_{i1}^2 \cdot \alpha_{i2} \ldots \alpha_{ik} y_i + (-1)^{k-1} \alpha_{i2} \ldots \alpha_{ik} (\alpha_{i2} - \alpha_{i1}) y_{i1} + \ldots +\\
&+ (\alpha_{ik+1} - \alpha_{ik}) y_{ik} + y_{ik+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 2, 3, \ldots, m_i - 1),\\
&y_{im_i}' = [(-1)^{m_i} \alpha_{i1}^2 \cdot \alpha_{i2} \ldots \alpha_{im_i} + f'_{ii0} + \alpha_{i1} f'_{ii1}] y_i + [(-1)^{m_i - 1} \alpha_{i2} \ldots \alpha_{im_i} \times\\
&\times (\alpha_{i2} - \alpha_{i1}) + f'_{ii1} + \alpha_{i2} f'_{ii2}] y_{i1} + \ldots + [-\alpha_{im_i} (\alpha_{im_i} - \alpha_{im_i - 1}) + f'_{iim_i - 1} +\\
&+ \alpha_{im_i} f'_{iim_i}] y_{im_i} + (-\alpha_{im_i} + f'_{iim_i}) y_{im_i} +\\
&+ \sum_{k=1(k\neq i)}^{n} \sum_{j=0}^{m_k - 1} (f'_{ikj} + \alpha_{kj+1} f'_{ikj+1}) y_{kj} + \sum_{k=1(k\neq i)}^{n} f'_{ikm_k} y_{km_k} + g_i(x)
\end{aligned} \tag{11}$$

$(f'_{ikj} = f'_{iu_{kj}};\qquad g_i(x) = f_i(x, 0, 0, \ldots, 0);\qquad i, k = 1, 2, \ldots, n;$

$j = 0, 1, \ldots, m_n)$.

Пусть можно подобрать числа $d_{i0} > 0$, α_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, n;$ $j = 1, 2, \ldots, m_i)$ так, что в области V:

$$-\infty < x < \infty, \qquad |y_{ij}| \leqslant d_{ij} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, m_i)$$

имеют место соотношения

$$(0 < d_{i1} = |\alpha_{i1}| d_{i0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$0 < d_{i2} = -\alpha_{i1}^2 d_{i0} + |\alpha_{i2} - \alpha_{i1}| d_{i1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$0 < d_{ik} = -[\,|\alpha_{i1}^2 \cdot \alpha_{i2} \ldots \alpha_{ik-1}| d_{i0} + |\alpha_{i2} \ldots \alpha_{ik-1}(\alpha_{i2} - \alpha_{i1})| d_{i1} + \ldots + \tag{12}$$
$$+ |\alpha_{ik-1}(\alpha_{ik-1} - \alpha_{ik-2})| d_{ik-2}] + |\alpha_{ik} - \alpha_{ik-1}| d_{ik-1}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 3, 4, \ldots, m_i);$$

$$|(-1)^{m_i}\alpha_{i1}^2 \alpha_{i2} \ldots \alpha_{im_i} + f'_{ii0} + \alpha_{i1} f'_{ii1}| d_{i0} + |(-1)^{m_i - 1} \alpha_{i2} \ldots \alpha_{im_i}(\alpha_{i2} - \alpha_{i1}) +$$
$$+ f'_{ii1} + \alpha_{i2} f'_{ii2}| d_{i1} + \ldots + |-\alpha_{im_i}(\alpha_{im_i} - \alpha_{im_i-1}) + f'_{iim_i-1} + \alpha_{im_i} f'_{iim_i}| d_{im_i-1} +$$
$$+ \sum_{k=1 (k \neq i)}^{n} \sum_{j=0}^{m_k - 1} |f'_{ikj} + \alpha_{kj+1} f'_{ikj+1}| d_{kj} + \tag{13}$$
$$+ \sum_{k=1 (k \neq i)}^{n} |f'_{ikm_k}| d_{km_k} \leqslant |f'_{iim_i} - \alpha_{im_i}| - |g_i(x)|$$

$(f'_{iim_i} < \alpha_{im_i}$ при $\alpha_{im_i} < 0;$ $\quad f'_{iim_i} > \alpha_{im_i}$ при $\alpha_{im_i} > 0;$ $\quad i = 1, 2, \ldots, n)$.

Тогда в области V система (11) удовлетворяет условию (a), если числа $\alpha_{ij} < 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n;$ $j = 1, 2, \ldots, m_i)$ и условию (a'), если числа $\alpha_{ij} > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n;$ $j = 1, 2, \ldots, m_i)$.

Итак, имеют место теоремы:

Теорема 11. *Если в пространстве* $(x, u_{10}, u_{11}, \ldots, u_{nm_n})$ *выполнены условия* (A'), ($Б'$), ($В'$) *и можно подобрать числа* $d_{i0} > 0$ $\alpha_{ij} < 0$ (*или* $\alpha_{ij} > 0$), $(i = 1, 2, \ldots, n;$ $j = 1, 2, \ldots, m_i)$ *таким образом, что при выполнении условий* (12) *выполняются условия* (13), *то система* (10) *имеет периодическое* (*периода* T) *решение в области* U:

$$-\infty < x < \infty, \qquad |u_{i0}| \leqslant d_{i0}, \quad |u_{ij}| \leqslant |\alpha_{ij}| d_{ij-1} + d_{ij}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m_i).$$

Теорема 12. *Если в пространстве* $(x, u_{10}, u_{11}, \ldots, u_{nm_n})$ *выполнены условия* (A'), ($Б'$) *и можно подобрать числа* $d_{i0} > 0$, $\alpha_{ij} < 0$ (*или* $\alpha_{ij} > 0$), $(i = 1, 2, \ldots, n;$ $j = 1, 2, \ldots, m_i)$ *таким образом, что при выполнении условий* (12) *выполняются условия* (13), *то система* (10) *имеет решение, принадлежащее области* U.

Замечание. В теоремах 11, 12 достаточно требовать выполнения условий (A'), ($Б'$) в области U

Пусть

$$y_{ij}^{(1)} = y_{ij}^{(1)}(x), \qquad y_{ij}^{(2)} = y_{ij}^{(2)}(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, m_i)$$

— два решения системы (11).

Обозначим

$$y_{ij}^{(2)}(x) - y_{ij}^{(1)}(x) = \beta_{ij} v_{ij}(x) \qquad (i = 1,2, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, m_i;\ \beta_{i0} = 1).$$

Тогда функции $v_{ij}(x)$ $(i=1, 2, \ldots, n;\ j=0, 1, \ldots, m_i)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$v'_{i0} = \alpha_{i1} v_{i0} + \beta_{i1} v_{i1} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

$$v'_{i1} = -\frac{\alpha_{i1}^2}{\beta_{i1}} v_{i0} + (\alpha_{i2} - \alpha_{i1}) v_{i1} + \frac{\beta_{i2}}{\beta_{i1}} v_{i2} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

$$v'_{ik} = \frac{(-1)^k}{\beta_{ik}} \alpha_{i1}^2 \alpha_{i2} \ldots \alpha_{ik} v_{i0} + (-1)^{k-1} \frac{\beta_{i1}}{\beta_{ik}} \alpha_{i2} \ldots \alpha_{ik} (\alpha_{i2} - \alpha_{i1}) v_{i1} + \ldots +$$

$$+ (\alpha_{ik+1} - \alpha_{ik}) v_{ik} + \frac{\beta_{ik+1}}{\beta_{ik}} v_{ik+1} \qquad (i=1, 2, \ldots, n;\ k=2, 3, \ldots, m_i - 1), \tag{14}$$

$$v'_{im_i} = \frac{1}{\beta_{im_i}} [(-1)^{m_i} \alpha_{i1} \cdot \alpha_{i2} \ldots \alpha_{im_i} + f'_{ii0} + \alpha_{i1} f'_{ii1}] v_{i0} +$$

$$+ \frac{\beta_{i1}}{\beta_{im_i}} [(-1)^{m_i - 1} \alpha_{i2} \ldots \alpha_{im_i} (\alpha_{i2} - \alpha_{i1}) + f'_{ii1} + \alpha_{i2} f'_{ii2}] v_{i1} +$$

$$+ \ldots + \frac{\beta_{im_i - 1}}{\beta_{im_i}} [-\alpha_{im_i} (\alpha_{im_i} - \alpha_{im_i - 1}) + f'_{iim_i - 1} + \alpha_{im_i} f'_{iim_i}] v_{im_i - 1} +$$

$$+ (-\alpha_{im_i} + f'_{iim_i}) v_{im_i} + \frac{1}{\beta_{im_i}} \left[\sum_{k=1 (k \neq i)}^{n} \sum_{j=0}^{m_k - 1} (f'_{ikj} + \alpha_{kj+1} f'_{ikj+1}) \beta_{kj} v_{kj} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1 (k \neq i)}^{n} f'_{ikm_k} \beta_{km_k} v_{km_k} \right] \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Для сокращения записи обозначим через $a_{ij}^{(k,l)}$ $(i, k=1, 2, \ldots, n;$ $j, l=0, 1, \ldots, m_{i(k)})$ модули коэффициентов при v_{kl} в $\left(i+j+\sum_{p=1}^{i-1} m_p\right)$-м уравнении системы (14).

Пусть $a_{ij}^{(k,l)}$ $(i, k=1, 2, \ldots, n;\ j, l=0, 1, \ldots, m_{i(k)})$ удовлетворяют следующим соотношениям

$$\sum_{\substack{i=1 \\ (i,j) \neq (k,l)}}^{n} \sum_{j=0}^{m_i} a_{ij}^{(k,l)} < a_{kl}^{(k,l)} \tag{15}$$

$$(k=1, 2, \ldots, n;\ l=0, 1, \ldots, m_k;\ \text{при}\ j \neq m_1, m_2, \ldots, m_n$$

$$a_{ij}^{(k,l)} = 0,\ \text{если}\ |i-k| \geqslant 1\ \text{или}\ l-j \geqslant 2).$$

Используя изложенное выше легко доказать следующие теоремы.

Теорема 13. *Если выполнены условия теоремы* (11) *и можно подобрать такие числа* $\beta_{ij} > 0$ $(i=1, 2, \ldots, n;\ j=1, 2, \ldots, m_i)$, *что будут выполняться условия* (15), *то любое решение системы* (10) *стремится к единственному периодическому решению системы* (10) *при* $x \to \infty$, *если* $\alpha_{ij} < 0$ $(i=1, 2, \ldots, n;\ j=1, 2, \ldots, m_i)$, *и при* $x \to -\infty$, *если* $\alpha_{ij} > 0$ $(i=1, 2, \ldots, n;\ j=1, 2, \ldots, m_i)$.

Теорема 14. *Если выполнены условия теоремы 12 и можно подобрать такие числа* $\beta_{ij} > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m_i)$, *что выполняются условия* (15), *то любое решение системы* (10) *стремится к единственному ограниченному при всех* x *решению системы* (10) *при* $x \to \infty$, *если* $\alpha_{ij} < 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m_i)$, *и при* $x \to -\infty$, *если* $\alpha_{ij} > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m_i)$.

Пример. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y''' = (\sin x + 2)\frac{y' + 2}{y + 8} - 6y - 9y' - 5y''. \tag{16}$$

Имеем:

$$f'_0 = -(\sin x + 2)\frac{y' + 2}{(y + 8)^2} - 6; \qquad f'_1 = \frac{\sin x + 2}{y + 8} - 9;$$

$$f'_2 = -5; \qquad g(x) = \frac{1}{4}(\sin x + 2).$$

Пусть $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -3$. Проверим, что в области V: $-\infty < x < \infty$, $|y_i| \leqslant 1$ $(i = 0, 1, 2)$ имеет место неравенство [7] $(n = 2;\ f'_2 < \alpha_2 < 0)$:

$$|\alpha_1^2\alpha_2 + f'_0 + \alpha_1 f'_1|\, d_0 + |-\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_1) + f'_1 + \alpha_2 f'_2|\, d_1 \leqslant |f'_2 - \alpha_2|\, d_2 - |g(x)|.$$

Получим:

$$\left|-3 - (\sin x + 2)\frac{y' + 2}{(y + 8)^2} - 6 - \frac{\sin x + 2}{y + 8} + 9\right| + \left|-6 + \frac{\sin x + 2}{y + 8} - 9 + 15\right| =$$

$$= \left|(\sin x + 2)\frac{y' + 2}{(y + 8)^2} + \frac{\sin x + 2}{y + 8}\right| + \left|\frac{\sin x + 2}{y + 8}\right| \leqslant \frac{3 \cdot 3}{49} + \frac{3}{7} + \frac{3}{7} =$$

$$= \frac{51}{49} < 2 - \frac{1}{4}|\sin x + 2| \leqslant 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}.$$

Следовательно, уравнение (16) в области U обладает периодическим (периода 2π) решением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Лузин, О качественном исследовании уравнения движения поезда, Матем. сб., т. 39, 1932, стр. 6.
2. С. А. Самедова, Критерии существования и единственности периодического решения уравнения $y' = f(x, y)$, Тр. Ин-та физ. и матем., т. VI, Изд-во АН Азерб. ССР, Баку, 1953.
3. В. С. Лощинин, О существовании и единственности периодического решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, Уч. зап. Ряз. гос. пед. ин-та, т. 13, 1956.
4. Б. П. Демидович, О существовании предельного режима некоторой нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Уч. зап. Моск. гос. ун-та, т. 8, вып. 181, 1956.
5. С. А. Самедова, Существование периодического предельного режима нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук, вып. 2, 1960.
6. Б. П. Демидович, О диссипативности некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений, I, II, Вестн. Моск. ун-та, сер. I, матем., мех., вып. 6, 1961; вып. I, 1962.
7. Э. А. Коддингтон и Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1958.
8. Л. В. Канторович и Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959.

Поступила 22.VI 1962 г.
Харьков