О численном решении основной бигармонической задачи при большом количестве узлов сетки

Е. М. Приходько

Полученная в работах [1, 2] формула суммарных представлений для конечноразностного бигармонического уравнения дает возможность очень просто решать бигармоническую задачу в случае, когда заданы значения искомой функции на контуре и сумма ее предконтурных и законтурных значений. Эта задача соответствует, например, случаю, когда края упругой пластины свободно оперты. Однако, указанная формула суммарных представлений в случае, когда вместо суммы предконтурных и законтурных значений функции задается их разность (что соответствует случаю жестко заделанных краев пластинки), хотя дает по сравнению с ранее известными методами значительное упрощение решения задачи, однако приводит к необходимости численного решения некоторой вспомогательной системы линейных алгебраических уравнений довольно сложного вида. В настоящей работе мы выводим новую формулу суммарных представлений, отличную от формулы, приведенной в работах [1, 2], которая позволяет значительно проще по сравнению с тем, как это указано в работах [1, 2], решать конечноразностную бигармоническую задачу при условии, что заданы контурные значения функции и разность (а не сумма) ее предконтурных и законтурных значений.

Рассмотрим основную бигармоническую задачу

$$\Delta\Delta U = f(x, y), \qquad U\Big|_S = \varphi(s), \qquad \frac{\partial U}{\partial n}\Big|_S = \psi(s), \tag{1}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$, $f(x, y)$ — заданная функция от x и y, $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ — заданные функции длины дуги s границы S прямоугольника D, $\vec{n}$ — внешняя нормаль к S. Этой дифференциальной бигармонической задаче соответствует конечноразностная бигармоническая задача следующего вида:

$$\Delta_h\Delta_h u = f(x_i y_k) \qquad (i = 2, 3, \ldots, m-1), \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

$$u|_S = \varphi(s), \tag{3}$$

$$u_k(x_0) - u_k(x_2) = \psi_k(x_1),\ u_k(x_{m+1}) - u_k(x_{m-1}) = \psi_k(x_m)\ (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

$$u_{-1}(x_i) - u_1(x_i) = \psi_0(x_i),\ u_{n+2}(x_i) - u_n(x_i) = \psi_{n+1}(x_i)\ (i = 2, 3, \ldots, m-1), \tag{5}$$

где $\Delta_h\Delta_h u$ — конечноразностный бигармонический оператор, построенный по тринадцати узлам сетки, правые части равенства (4) и (5) — известные величины, $u_k(x_i) = u(x_i, y_k)$.

Будем пользоваться равномерной сеткой $x_i = x_0 + ih$, $y_k = y_0 + kh_1$ $(i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, где h — шаг сетки по x, $h = \alpha h_1$ — шаг сетки по y $(h, h_1 > 0)$, (x_0, y_0) — заданная точка. Под прямоугольником D будем понимать совокупность точек (x_i, y_k), $(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 0, 1, \ldots, n+1)$. При этом точки (x_i, y_k) $(i = 2, 3, \ldots, m-1;\ k = 1, 2, \ldots, n)$ будем называть внутренними, а точки (x_i, y_0), (x_i, y_{n+1}) $(i = 1, 2, \ldots, m)$, (x_1, y_k), (x_m, y_k) $(k = 0, 1, \ldots, n+1)$ — контурными.

Поступая так же, как и в работах [1, 2], уравнение в частных конечных разностях (2) сводим к распадающейся системе n обыкновенных разностных уравнений. Но в отличие от работ [1, 2], частное решение каждого из уравнений этой системы подчиняем не нулевым начальным условиям задачи Коши, а нулевым краевым условиям: на вертикальных сторонах прямоугольника равны нулю значения функции и разности ее законтурных и предконтурных значений.

Получаем формулу суммарных представлений в виде

$$\vec{u}(x_i) = P\alpha(x_i)\vec{A} + P\beta(x_i)\vec{B} + P\gamma(x_i)\vec{C} + P\delta(x_i)\vec{D} +$$
$$+\sum_{p=2}^{m-1} PD(i,p)P[h^4\vec{f}(x_p) - \vec{\omega}(x_p) - \alpha^4\vec{w}_0(x_p) - 2\alpha^4\vec{w}(x_p)] \qquad (6)$$
$$(i = 0, 1, \ldots, m+1).$$

Здесь

$$\vec{u}(x_i) = \{u_k(x_i)\}_1^n,\quad \vec{f}(x_p) = \{f_k(x_p)\}_1^n,\quad \vec{A} = \{A_k\}_1^n,\quad \vec{B} = \{B_k\}_1^n\quad \vec{C} = \{C_k\}_1^n,$$
$$\vec{D} = \{D_k\}_1^n$$

— n-мерные векторы, $u_k(x_i) = u(x_i, y_k)$, $f_k(x_p) = f(x_p, y_k)$, а A_k, B_k, C_k, D_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — некоторые параметры,

$$\vec{w}(x_p) = \{\psi_0(x_p), 0, \ldots, 0\psi_{n+1}(x_p)\},$$
$$\vec{\omega}(x_p) = \{Qu_p(x_p), \alpha^4 u_0(x_p), 0, \ldots, 0, \alpha^4 u_{n+1}(x_p), Qu_{n+1}(x_p)\},$$
$$Qu_k(x_p) = 2\alpha^2 u_k(x_{p+1}) - 4(1+\alpha^2)\alpha^2 u_k(x_p) + 2\alpha^2 u_k(x_{p-1}) \quad (k = 0, n+1)$$

— известные n-мерные векторы, $\vec{w}(x_p) = \{u_1(x_p), 0, \ldots, 0, u_n(x_p)\}$ — n-мерный вектор предконтурных значений искомого решения на горизонталях.

Далее

$$P = [p_{i,k}]_{i,k=1}^n = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\left[(-1)^{i+k}\sin\frac{ik}{n+1}\pi\right]_{i,k=1}^n$$

— квадратная матрица n-го порядка,

$$\alpha(x_i) = [\alpha_k(x_i)]_1^n,\quad \beta(x_i) = [\beta_k(x_i)]_1^n,\quad \gamma(x_i) = [\gamma_k(x_i)]_1^n,\ \delta(x_i) = [\delta_k(x_i)]_1^n,$$
$$\alpha_k(x_i) = (i-1)\mathrm{Sh}(i-1)\mu_k,\ \beta_k(x_i) = (i-1)\mathrm{Sh}\mu_k\mathrm{Ch}(i-1)\mu_k - \mathrm{Ch}\mu_k\mathrm{Sh}(i-1)\mu_k,$$
$$\gamma_k(x_i) = (i-m)\mathrm{Sh}(i-m)\mu_k,\ \delta_k(x_i) = (i-m)\mathrm{Sh}\mu_k\mathrm{Ch}(i-m)\mu_k - \mathrm{Ch}\mu_k\mathrm{Sh}(i-m)\mu_k,$$
$$\mu_k = \ln[a_k + \sqrt{a_k^2 - 1}],\qquad a_k = 1 + \alpha^2 + \alpha^2\lambda_k,\qquad \lambda_k = \cos\frac{k\pi}{n+1}.$$

Наконец, $D(i,p) = [D_k(i,p)]$ — диагональная матрица n-го порядка, где

$$D_k(i,p) = \begin{cases} D_k'(i,p) & \text{при } i = 0, 1, 2, 3,\ p = 2, 3, \ldots, m-1, \\ D_k''(i,p) & \text{при } i = m+1,\quad p = 2, 3, \ldots, m-1, \\ D_k'(i,p) & \text{при } 4 \leqslant i \leqslant m,\quad 2 \leqslant p \leqslant i-2, \\ D_k''(i,p) & \text{при } 4 \leqslant i \leqslant m,\quad i-1 \leqslant p \leqslant m-1, \end{cases}$$

$$D_k'(i,p) = \frac{1}{c_k}\{(m-1)(i-1)[(m-p-1)\mathrm{Sh}(i-p+1)\mu_k - (m-p+1)\times$$
$$\times\mathrm{Sh}(i-p-1)\mu_k] + \mathrm{Cth}^2\mu_k\mathrm{Sh}(i-1)\mu_k\mathrm{Sh}(m-1)\mu_k[(i-p+1)\mathrm{Sh}(m-p-$$
$$-1)\mu_k - (i-p-1)\mathrm{Sh}(m-p+1)\mu_k] + (i-1)\mathrm{Cth}\mu_k\mathrm{Sh}(i-m)\mu_k\times$$
$$\times[p\mathrm{Sh}(m-p+1)\mu_k - (p-2)\mathrm{Sh}(m-p-1)\mu_k] + (i-m)\mathrm{Cth}\mu_k\mathrm{Sh}(i-1)\mu_k\times$$
$$\times[(m-p+1)\mathrm{Sh}p\mu_k - (m-p-1)\mathrm{Sh}(p-2)\mu_k]\},$$

$$D''_k(i,p)=\frac{1}{c_k}\{(m-1)(i-m)[(p-2)\mathrm{Sh}(i-p-1)\mu_k-p\mathrm{Sh}(i-p+1)\mu_k]+$$

$$+\mathrm{cth}^2\mu_k\mathrm{Sh}(i-m)\mu_k\mathrm{Sh}(m-1)\mu_k[(i-p-1)\mathrm{Sh}(p-2)\mu_k-(i-p+1)\mathrm{Sh}p\mu_k]+$$

$$+(i-1)\mathrm{Cth}\mu_k\mathrm{Sh}(i-m)\mu_k[p\mathrm{Sh}(m-p+1)\mu_k-(p-2)\mathrm{Sh}(m-p-1)\mu_k]+$$

$$+(i-m)\mathrm{Cth}\mu_k\mathrm{Sh}(i-1)\mu_k[(m-p+1)\mathrm{Sh}p\mu_k-(m-p-1)\mathrm{Sh}(p-2)\mu_k]\},$$

$$c_k=4\mathrm{Sh}\mu_k[\mathrm{Ch}^2\mu_k\mathrm{Sh}^2(m-1)\mu_k-(m-1)^2\mathrm{Sh}^2\mu_k].$$

Краевые условия на вертикальных сторонах прямоугольника D дают следующую систему уравнений для определения векторов $\vec{A},\vec{B},\vec{C},\vec{D}$

$$P\gamma(x_1)\vec{C}+P\delta(x_1)\vec{D}=\vec{u}(x_1),$$

$$P[\gamma(x_0)-\gamma(x_2)]\vec{C}+P[\delta(x_0)-\delta(x_2)]\vec{D}=\vec{u}(x_0)-\vec{u}(x_2),$$

$$P\alpha(x_m)\vec{A}+P\beta(x_m)\vec{B}=\vec{u}(x_m),$$

$$P[\alpha(x_{m+1})-\alpha(x_{m-1})]\vec{A}+P[\beta(x_{m+1})-\beta(x_{m-1})]\vec{B}=\vec{u}(x_{m+1})-\vec{u}(x_{m-1}).$$

Эта система $4n$ уравнений распадается на $2n$ систем с двумя неизвестными. Поэтому параметры $A_k,\ B_k,\ C_k,\ D_k\ (k=1,2,3,\ldots,n)$ можем считать известными.

Для определения компонент вектора предконтурных значений при $p=2,3,\ldots,m-1$ в соответствии с формулой суммарных представлений (6) получаем систему $2m-4$ линейных алгебраических уравнений

$$u_1(x_i)=-2\alpha^4\sum_{p=2}^{m-1}u_1(x_p)A(i,p)-2\alpha^4\sum_{p=2}^{m-1}u_n(x_p)B(i,p)+F_1(x_p),$$

$$(i=2,3,\ldots,m-1).$$

$$u_n(x_i)=-2\alpha^4\sum_{p-2}^{m-1}u_n(x_p)A(i,p)-2\alpha^4\sum_{p=2}^{m-1}u_1(x_p)B(i,p)+F_n(x_p),$$

где $F_1(x_p)$ и $F_n(x_p)$ — вполне определенные известные величины,

$$A(i,p)=\sum_{j=1}^{n}p_{1j}^2D_j(i,p),\qquad B(i,p)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}p_{1j}^2D_j(i,p).$$

Полагая $V(x_i)=u_1(x_i)-u_n(x_i)$, имеем

$$V(x_i)=-2\alpha^4\sum_{p=2}^{m-1}V(x_p)[A(i,p)-B(i,p)]+F_1(x_i)-F_n(x_i),\tag{7}$$

$$u_1(x_i)=-2\alpha^4\sum_{p=2}^{m-1}u_1(x_p)[A(i,p)+B(i,p)]+F_1(x_i)+2\alpha^4\sum_{p=2}^{m-1}V(x_p)B(i,p).\tag{8}$$

Таким образом, вектор предконтурных значений $\vec{w}(x_p)$ $(p=2,3,\ldots,m-1)$ находится в результате последовательного решения двух систем линейных алгебраических уравнений с $m-2$ неизвестными. Подставляя этот вектор в формулу (6), получаем решение бигармонической задачи для прямоугольника D при произвольно заданном количестве внутренних узлов. В случае области, составленной из двух или нескольких прямоугольников, для получения решения основной бигармонической задачи можно поступить аналогично тому, как указано в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Н. Положий, Об одном численном методе решения краевых задач для уравнений в частных производных, ДАН СССР, т. 134, № 1, 1960.
2. Г. Н. Положий, Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента, Изд-во Киевского ун-та, 1962.

Поступила 7.XII 1962 г.
Киев