Разложение линейных и нелинейных дифференциальных операторов на действительные сомножители. I

В. Я. Скоробогатько

Эта работа непосредственно примыкает к работе [1] и является ее развитием.

В п. 1 устанавливаются необходимые и достаточные условия разложения дифференциального оператора n-го порядка в произведение линейных сомножителей первого порядка с непрерывными коэффициентами, указана связь с n-точечной задачей Валле Пуссена и теоремой о дифференциальных неравенствах С. А. Чаплыгина. В п. 2 часть результатов п. 1 обобщается на случай матричных дифференциальных операторов и именно установлены необходимые и достаточные условия разложимости матричного дифференциального оператора с переменными коэффициентами в произведении гладких сомножителей первого порядка. В п.3 (II части) вводится понятие разложения нелинейного дифференциального оператора на множители первой степени. Устанавливаются условия, когда такое разложение возможно; в п. 4 математическая теория, развитая в первых трех параграфах, иллюстрируется на примере уравнения фокусировки электронных пучков.

Отметим, что в работе [2] установлены необходимые и достаточные условия разложимости матричного дифференциального оператора на линейные сомножители в комплексной области в случае постоянства коэффициентов у матричного оператора.

1. Пусть задано обыкновенное дифференциальное уравнение

$$L_n y = \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x)\, y = 0 \tag{1}$$

в сегменте $[0, b]$.

Предполагается, что коэффициенты уравнения [1] $a_i(x)$ непрерывны в этом сегменте. Имеет место теорема Г. Маммана:

для того чтобы оператор $L_n y$ разлагался в произведение линейных действительных сомножителей первого порядка с непрерывными коэффициентами в сегменте $[0, b]$, необходимо и достаточно, чтобы каждое решение $y \not\equiv 0$ обращалось в нуль в сегменте $[0, b]$ не более чем $(n-1)$ раз [1].

Доказательство теоремы приведено в работе [1].

Теперь будут установлены необходимые и достаточные условия разложимости дифференциального оператора $L_n y$ в иной форме. Предполагается дополнительно, что коэффициенты уравнения [1] n раз непрерывно дифференцируемы.

Теорема 1. *Для того чтобы дифференциальный оператор $L_n y$ имел вид $L_n y = \left(\frac{d}{dx} + \sigma\right) L_{n-1}\, y$ в сегменте* $[0, b]$, *необходимо и доста-*

[1] k-кратный нуль решения y считается за k нулей.

точно существование системы функции $\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-2}$, удовлетворяющей в сегменте $[0, b]$ системе уравнений

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}[(-\sigma + a_1)s] = \sigma_1 s,\\
&\frac{d}{dx}[(-\sigma + a_1)s] = \sigma_2 s,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d}{dx}[(-\sigma_{n-3} + a_{n-2})s] = \sigma_{n-2}s,\\
&\frac{d}{dx}[(-\sigma_{n-2} + a_{n-1})s] = a_n s,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $s = e^{\int\limits_0^x \sigma dx}$.

Доказательство. Установим сначала достаточность. Пусть существует в сегменте $[0, b]$ непрерывно дифференцируемое решение σ, $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-2}$ системы дифференциальных уравнений (2). Умножим уравнение (1) на функцию s.

Исходя из сказанного выше, оператор $L_n y$ имеет вид

$$
L_n y = \frac{d}{dx} s \left[\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + (-\sigma + a_1)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + (-\sigma_1 + a_2)\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} + \ldots + \right.
$$

$$
\left. + (-\sigma_{n-2} + a_{n-1})y\right] = \left(\frac{d}{dx} + \sigma\right)\left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + (-\sigma + a_1)\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \right.
$$

$$
\left. + (-\sigma_1 + a_2)\frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}} + \ldots + (-\sigma_{n-2} + a_{n-1})\right] y = \left(\frac{d}{dx} + \sigma\right) L_{n-1} y = 0.
$$

Достаточность условий теоремы 1 доказана. Установим необходимость. Предположим, что оператор $L_n y = 0$ имеет вид

$$
L_n y = \left(\frac{d}{dx} + \sigma\right)\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + p_{n-2}\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \ldots + p_0\right) y = 0. \tag{3}
$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых производных в левой и правой частях равенства (3), получаем систему равенств

$$
\begin{aligned}
&p_{n-2} + \sigma = a_1,\\
&\frac{dp_{n-2}}{dx} + \sigma p_{n-2} + p_{n-3} = a_2,\\
&\frac{dp_{n-3}}{dx} + \sigma p_{n-3} + p_{n-4} = a_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dp_{n-i+1}}{dx} + \sigma p_{n-i+1} + p_{n-i} = a_{i-1},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dp_0}{dx} + \sigma p_0 = a_n.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

(здесь введены новые функции $p_{n-i+1} = \sigma_{i-3} + a_{i-2}$, $i = 4, \ldots, n+1$).

На основании равенств (4) функции $\sigma, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-2}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \sigma' + \sigma^2 - \sigma a_1 - a_1' &= -\sigma_1, \\ \sigma_1' + \sigma\sigma_1 - \sigma a_2 - a_2' &= -\sigma_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_{n-2}' + \sigma\sigma_{n-2} - \sigma a_{n-1} - a_{n-1}' &= a_n, \end{aligned} \tag{5}$$

совпадающей с системой (2).

Теорема доказана.

К оператору $(n-1)$-го порядка $L_{n-1}y$ можно применить рассуждения, как и к оператору n-го порядка, и отделить еще один сомножитель и т. д., поэтому, для того, чтобы отделить n сомножителей, необходимо и достаточно, чтобы система непрерывно дифференцируемых функций

$$s_{i-1} = e^{\int\limits_0^x \sigma^{(i-1)} dx}, \qquad \sigma_1^{(i-1)}, \ldots, \sigma_{n-i-1}^{(i-1)}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

удовлетворяла системе уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}[(-\sigma - \sigma^{(1)} - \ldots - \sigma^{(i-1)} + a_1) s_{i-1}] = \sigma_1^{(i-1)} s_{i-1}, \\ &\frac{d}{dx}[(-\sigma_1 - \ldots - \sigma_1^{(i-1)} + a_2) s_{i-1}] = \sigma_2^{(i-1)} s_{i-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{d}{dx}[(-\sigma_{n-i-1} - \ldots - \sigma_{n-i-1}^{(i-1)} + a_{n-1}) s_{i-1}] = \\ &\qquad = (-\sigma_{n-1} - \sigma_{n-i}^{(1)} - \ldots - \sigma_{n-i}^{(i-2)} + a_{n-i+1}) s_{i-1}. \end{aligned} \tag{6}$$

В работе [1] доказано, что если оператор $L_n y = 0$ разлагается в произведение линейных сомножителей с непрерывными коэффициентами, то справедлива теорема о дифференциальных неравенствах С. А. Чаплыгина для этого оператора; таким образом, необходимые и достаточные условия (6) для разложения дифференциального оператора $L_n y = 0$ на линейные сомножители являются одновременно достаточными для справедливости теоремы о дифференциальных неравенствах.

Теперь установили связь с n-точечной задачей Валле Пуссена, которая, как известно, состоит в нахождении решения уравнения (1), проходящего через n заданных точек.

Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 2. *Разложение оператора $L_n y$ на линейные действительные сомножители первого порядка с непрерывными коэффициентами равносильно разрешимости n-точечной задачи Валле Пуссена.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что оператор $L_n y$ разложен в данном сегменте $[0, b]$ в произведение линейных действительных множителей с непрерывными коэффициентами; покажем, что n-точечная задача разрешима.

Пусть $(x_1, z_1), \ldots, (x_p, z_p)$ — p заданных точек, причем $0 \leqslant x_i \leqslant b$, $i = 1, \ldots, p$.

В точке x_i заданы значения производных $y^{(k)}(x_i) = z_k(x_i)$, $k = 0, 1, \ldots, k_i$; $k_1 + \ldots + k_p = n$. В частности, если $p = n$, то имеем обычную n-точечную задачу Валле Пуссена.

Обозначим через $y_1, \ldots, y_n$ фундаментальную систему решений уравнения (7). Покажем, что можно подобрать константы $c_1, \ldots, c_n$ **таким** образом, чтобы удовлетворялась система уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{(k)}(x_i) = z_k(x_i), \qquad k = 0, 1, \ldots, k_i; \qquad i = 1, \ldots, p. \tag{7}$$

Покажем, что

$$\det I = \begin{vmatrix} y_1(x_1) & \ldots & y_n(x_1) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ y_1^{(k_1)}(x_1) & \ldots & y_n^{(k_1)}(x_1) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ y_1(x_p) & \ldots & y_n(x_p) \\ y_1^{(k_p)}(x_p) & \ldots & y_n^{(k_p)}(x_p) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если предположить от противного, что $\det I = 0$, то должны существовать постоянные c_i, не все равные нулю и такие, что

$$\widetilde{y}^{(k)}(x_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j^{(k)}(x_i) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, k_i; \qquad i = 1, \ldots, p,$$

и, следовательно, $\widetilde{y}(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j(x) \underset{0<x<b}{\neq} 0$, что противоречиво, так как на основании теоремы Г. Маммана решение $\widetilde{y}$ уравнения (7), обратившееся n раз в нуль, тождественно равно нулю. Разрешимость n-точечной задачи установлена.

Пусть теперь в данном сегменте $[0,b]$ разрешима n-точечная задача. Покажем, что в этом сегменте оператор $L_n y$ разлагается в произведение линейных сомножителей с непрерывными коэффициентами. Установим, что в сегменте $[0, b]$ любое решение $y \not\equiv 0$ обращается в нуль не более чем $(n-1)$ раз. Действительно, если бы нашлось такое решение $\widetilde{y} \not\equiv 0$, которое в точках $x_1, \ldots, x_p$ имеет значение $\widetilde{y}^{(k)}(x_i) = 0$, $i = 1, \ldots, p$; $k = 0,1, \ldots, k_i$ $k_1 + \ldots + k_p = n$, то были бы два решения $\widetilde{y}$ и $y = 0$ n-точечной задачи Валле Пуссена для системы точек $(x_i, 0)$, $i = 1, \ldots, p$, что противоречит предположению о разрешимости n-точечной задачи.

На основании теоремы Г. Маммана отсюда следует разложимость на множители оператора $L_n y$.

Теорема доказана.

Естественно возникает вопрос об эффективных достаточных признаках разложимости дифференциального оператора на линейные сомножители. Приведем некоторые из них.

Прежде всего отметим, что сегмент разрешимости системы (6) является также интервалом разложимости дифференциального оператора $L_n y$ на линейные сомножители с непрерывными коэффициентами. Введем обозначение

$$m_i = \max |a_i(x)|, \qquad 0 \leqslant x \leqslant b, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где a_i — коэффициенты уравнения (1), через h_0 обозначим положительный корень уравнения

$$m_n \frac{h^n}{n!} + \ldots + m_1 \frac{h}{1!} - 1 = 0 \tag{7'}$$

В любом сегменте $[0, b]$, длина которого не превосходит h_0, разрешима n-точечная задача [3, стр. 157] и, следовательно, согласно теореме 2 оператор $L_n y$ разлагается там на линейные действительные множители с непрерывными коэффициентами.

Сравним теперь между собой достаточные признаки разложимости, основанные на теоремах 1 и 2. Если коэффициенты $a_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, $0 \leqslant x \leqslant b$, n раз непрерывно дифференцируемы, то в интервале $0 \leqslant x \leqslant b$, длина которого не превосходит h_0, разрешима система дифференциальных уравнений (6), поэтому признак разрешимости дифференциального оператора (1), основанный на теореме 1, в этом случае не слабее достаточного признака (7'). Приведем пример, который показывает, что признак, основанный на теореме 1, существенно сильнее признака (7') при повышенной гладкости коэффициентов a_i.

Если $n = 2$ и коэффициент $a_2 < 0$ в интервале $a < x \leqslant b$, то система (6), которая превращается в одно уравнение, разрешима в любом интервале; действительно, если функция $\sigma = \infty$ в некоторой точке, то в этой точке функция $s = e^{\int\limits_0^x \sigma dx} = 0$, но функция s удовлетворяет уравнению $s'' - (a_1 s)' + a_2 s = 0$, поэтому из-за условия $a_2 < 0$ всегда в любом интервале $(0, b)$ можно подобрать функцию s, которая не обращается в нуль ни в одной точке интервала $(0, b)$ и, следовательно, функция $\sigma \neq \infty$ в этом интервале. Признак же (7') в этом случае гарантирует разрешимость системы (6) только в некотором интервале, не превосходящем по длине некоторое число h_0.

Можно непосредственно пользоваться теоремой существования решения для оценки интервала разрешимости системы (2) или (6). Положим

$$m = \max_{0 < x < b,\ i=1, \ldots, n,} |a_i|, \qquad n = \max_{0 < x < b} |a_i'|.$$

При помощи простых выкладок убеждаемся, что система (2) разрешима в интервале $(0, b_1)$, если его длина не более меньшего из следующих двух чисел

$$\left\{\frac{b}{2}, \frac{1}{2\sqrt{n+m} + m+1}\right\}.$$

Этот достаточный признак разложимости хуже, вообще говоря, чем признак (7'), так как число n может быть и весьма большим, в то время как в признаке (7') отсутствуют производные a_i'.

2. Результаты этого раздела с идейной точки зрения несущественно отличаются от результатов предыдущего, поэтому изложение будет более сжатым.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\overline{L}_n y = \left[E \frac{d^n}{dx^n} + A_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + A_n(x)\right] y = 0; \tag{8}$$

здесь E — единичная матрица, $A_i(x)$ — n раз непрерывно дифференцируемые квадратичные матрицы,

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad 0 \leqslant x \leqslant b.$$

Решения рассматриваются в классе n раз непрерывно дифференцируемых функций.

Введем квадратные матрицы, определенные формулами

$$s_{i-1} = e^{\int\limits_a^x \sigma^{(i-1)} dx}, \qquad \sigma_1^{(i-1)}, \ldots, \sigma_{n-i-1}^{(i-1)}.$$

Теорема 3. *Для того чтобы матричный дифференциальный оператор $L_n y$ разлагался в произведение линейных действительных множителей первого порядка с непрерывными коэффициентами в данном сегменте, необходимо и достаточно, чтобы была разрешима в том же сегменте система дифференциальных уравнений*

$$\frac{d}{dx}[(-\sigma-\sigma^{(1)}-\ldots-\sigma^{(i-1)}+A_1)s_{i-1}]=\sigma_1^{(i-1)}s_{i-1},$$

$$\frac{d}{dx}[(-\sigma-\ldots-\sigma_1^{(i-1)}+A_2)s_{i-1}]=\sigma_2^{(i-1)}s_{i-1},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (9)$$

$$\frac{d}{dx}[(-\sigma_{n-i-1}-\ldots-\sigma_{n-i-1}^{(i-1)}+A_{n-i})s_{i-1}]=$$

$$=(-\sigma_{n-i}-\sigma_{n-i}^{(1)}-\ldots-\sigma_{n-i}^{(i-2)}+A_{n-i+1})s_{i-1},\ i=1,\ldots,n.$$

Доказательство точно такое же, как и у теоремы 1.

Система (9) согласно теореме существования всегда разрешима в достаточно малом интервале изменения x, поэтому «в малом» матричный дифференциальный оператор всегда может быть разложен в произведение линейных непрерывных дифференциальных операторов вида

$$\overline{L}_n y=\left(E\frac{d}{dx}+\sigma\right)\cdot\left(E\frac{d}{dx}+\sigma^{(1)}\right)\cdot\ldots\cdot\left(E\frac{d}{dx}+\sigma^{n-1}\right)y=0.$$

Из элементарных соображений, основанных на теореме существования, следует, что один сомножитель может быть отщеплен от оператора $L_n y$ в интервале длины, не большем, чем

$$\min\left\{b,\frac{1}{n}\frac{\sqrt{q}}{2\sqrt{q}+(n\varrho+1)\frac{1}{\sqrt{n}}}\right\},$$

где $\varrho=\max|(A_i)|, \qquad 0\leqslant x\leqslant b,$

$$q=\max_{0\leqslant x\leqslant b}[\,|(A_i')|,\qquad |(A_{n-1}'-A_n)|\,].$$

Рассмотрим задачу с начальными условиями

$$y^{(k)}=\alpha_k^0,\qquad k=0,\ldots,n-1$$

для системы (8).

Пусть дифференциальный оператор $\overline{L}_n y$ разлагается в произведение линейных дифференциальных операторов первого порядка в сегменте $[0, b]$:

$$\overline{L}_n y=\left(E\frac{d}{dx}+\gamma_1\right)\cdots\left(E\frac{d}{dx}+\gamma_n\right)y,$$

где γ_i, $i=1,\ldots,n$, — квадратные матрицы, непрерывно дифференцируемые n раз. В этом случае несбязательно $z\geqq y$, если $\overline{L}_n z\geqq 0$ и $z^{(k)}|_{x=0}=y^{(k)}$, $k=0,\ldots,n-1$, $0\leqslant x\leqslant b$, но если все матрицы $\gamma_i\leqslant 0$, $i=1,\ldots,n$, то теорема о дифференциальных неравенствах справедлива, т. е. если для некоторого столбца z, $z^{(k)}|_{x=0}=y^{(k)}$, $k=0,\ldots,n-1$, и $\overline{L}_n z\geqq 0$, то $z\geqq y$ при $0\leqslant x\leqslant b$.

В работе [4] установлена теорема о дифференциальных неравенствах при введенных предположениях для $n=1$.

Положим

$$\left(E\frac{d}{dx}+\gamma_2\right)\cdots\left(E\frac{d}{dx}+\gamma_n\right)z=\omega_1,$$

$$\left(E\frac{d}{dx}+\gamma_2\right)\cdots\left(E\frac{d}{dx}+\gamma_n\right)y=Y_1.$$

Очевидно $\omega_1|_{x=0}=Y_1$ и так как $\left(E\frac{d}{dx}+\gamma_1\right)\omega_1\lesseqgtr 0$, то $\omega_1\lesseqgtr Y_1$.

Далее обозначим

$$\left(E\frac{d}{dx}+\gamma_3\right)\cdots\left(E\frac{d}{dx}+\gamma_n\right)z=\omega_2,$$

$$\left(E\frac{d}{dx}+\gamma_3\right)\cdots\left(E\frac{d}{dx}+\gamma_n\right)y=Y_2.$$

Имеем $\left(E\frac{d}{dx}+\gamma_2\right)(\omega_2-Y_2)\gtreqless 0$ и $\omega_2|_{x=0}=Y_2$.

Продолжая такое рассуждение далее, приходим к неравенству

$$\left(E\frac{d}{dx}+\gamma_n\right)(z-y)\gtreqless 0,$$

и, следовательно, $z\gtreqless y$ в интервале $(0, b)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Я. Скоробогатько, Разложение дифференциального оператора на множители и теорема о дифференциальных неравенствах, УМЖ, т. XII, № 2, 1960.

2. Я. Б. Лопатинский, Разложение полиномиальной матрицы на множители, Научн. зап. Львовск. политехн. ин-та, сер. физ.-матем., № 2, 1956, 3—7.

3. Дж. Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 1, ИЛ, М., 1953.

4. Б. Н. Бабкин, К теореме С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах, Матем. сб., т. 46 (88), № 4, 1958.

5. С. А. Чаплыгин, Избранные труды по механике и математике, Гостехиздат, М., 1954, 494—496.

Поступила 10.I 1960 г.
Львов