Исследование нестационарных процессов в существенно нелинейной колебательной системе

Э. Ф. Файзибаев

Известно, что почти все задачи нелинейной механики, математически формулируемые при помощи нелинейных дифференциальных уравнений с малой нелинейностью, строго говоря, существенно нелинейны. Поэтому, по сути дела, они должны описываться существенно нелинейными дифференциальными уравнениями. Предположение малой нелинейности таких задач производится исключительно для того, чтобы избежать математических трудностей, связанных с решениями существенно нелинейных дифференциальных уравнений.

Для решения задачи с существенной нелинейностью общих аналитических методов пока не существует. Однако во многих случаях для решения таких задач может быть с успехом применен так называемый «метод припасовки», примененный еще в 1911 году Н. Д. Папалекси [8] для решения задачи выпрямления переменного тока в цепи с идеальным выпрямителем и самоиндукцией.

При исследовании систем методом припасовывания ограничение малой нелинейности на систему не накладывается.

E. I. Ergin [9] исследовал существенно нелинейные колебательные процессы так называемым методом билинейной аппроксимации, сущность которого почти одинакова с методом «припасовки». E. I. Ergin аппроксимирует нелинейную функцию двумя отрезками прямых, вследствие чего вместо нелинейного уравнения получает систему двух линейных уравнений. Ясно, что не все существенно нелинейные функции хорошо аппроксимируются двумя прямолинейными отрезками. Поэтому возникает задача об аппроксимации сильно нелинейной функции n такими прямолинейными отрезками так, чтобы дать наилучшую аппроксимацию нелинейной функции.

Рассмотрим следующее нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + F(x) = P(t), \tag{1}$$

где $F(x) = kx + f(x)$ — сильно нелинейная функция. k — упругая постоянная, kx — линейная часть $F(x)$, $f(x)$ — нелинейная часть $F(x)$, $P(t)$ — периодическая или почти периодическая функция времени. Покажем, что уравнение (1) можно аппроксимировать несколькими линейными уравнениями:

$$\begin{gathered}\frac{d^2x_1}{dt^2} + g_1(x_1) = P(t) \text{ для } |x| < x_{t_1},\\ \frac{d^2x_2}{dt^2} + g_2(x_2) = P(t) \text{ для } x_{t_1} < |x| < x_{t_2},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \frac{d^2x_n}{dt^2} + g_n(x_n) = P(t) \text{ для } x_{t_{n-1}} < |x| < x_{t_n},\end{gathered} \tag{2}$$

где $g_i(x_i)$ $(i = 1, \dots, n)$ — линейные функции, x_{t_i} — амплитуды перехода, n — число прямолинейных отрезков.

Линейные функции $g_i(x_i)$ выберем так, чтобы $g_1(x_1)$ включали в себе упругую постоянную k, равную наклону нелинейной восстанавливающей силы в начале колебательного процесса. Получим

$$g_{i+1}(x_{i+1}) = k_i x_i + \sum_{j=1}^{i} x_{t_j}(k_{j-1} - k_j) \qquad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1), \tag{3}$$

где k_i — коэффициент упругости i-го участка характеристики, равный тангенсу угла наклона прямой к оси абсцисс, причем принимается $k = k_0$. При этом существенно, что при

$$x_i = x_{t_i}, \quad g_{i+1}(x_{t_i}) = g_i(x_{t_i}). \tag{4}$$

Надо определить x_{t_i} и k_i $(i = 1, 2, \dots, n-1)$.

Определим их так, чтобы средняя квадратичная ошибка Δ между сильно нелинейной функцией $F(x)$ и линейными функциями $g_i(x_i)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ была бы минимальной:

$$\Delta = \frac{1}{x_m}\left\{\int\limits_0^{x_{t_1}} [g_1(x_1) - F(x)]^2\,dx + \sum_{i=1}^{n-2}\int\limits_{x_{t_i}}^{x_{t_{i+1}}}\left[g_{i+1}(x_{i+1}) - F(x)\right]^2 dx + \right.$$

$$+\int\limits_{x_{t_{n-1}}}^{x_m} [g_n(x_n) - F(x)]^2\,dx \Big\},\tag{5}$$

где x_m — наибольшее отклонение. Условия, при которых средняя квадратичная ошибка Δ имеет минимум, следующие:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x_{t_i}} = 0,\qquad \frac{\partial \Delta}{\partial k_i} = 0.\tag{5'}$$

Дифференцирование (5) приводит к алгебраической системе уравнений относительно x_{t_i}, k_i:

$$\sum_{i=r}^{n-1}\int\limits_{x_{t_i}}^{x_m} [g_{i+1}(x_{i+1}) - F(x)]\,dx = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots, n-1),\tag{6}$$

$$\sum_{i=r}^{n-1}\int\limits_{x_{t_i}}^{x_m} [g_{i+1}(x_{i+1}) - F(x)]\,\frac{\partial g_{i+1}(x_{i+1})}{\partial k_r}\,dx = 0 \; (r = 1, 2, \ldots, n-1).\tag{7}$$

Отсюда и находим

$$\sum_{i=r}^{n-1}(k_i - k)\,\frac{x_m^2 - x_{t_i}^2}{2} + \sum_{j=1}^{i}(k_{j-1} - k_j)\,x_{t_j}(x_m - x_{t_i})\Big] = \int\limits_{x_{t_i}}^{x_m} f(x)\,dx,\tag{8}$$

$$\sum_{i=r}^{n-1}\Big[(k_i - k)\,\frac{x_m^3 - x_{t_i}^3}{3} + \sum_{j=1}^{i}(k_{j-1} - k_j)\,x_{t_j}\,\frac{x_m^2 - x_{t_i}^2}{2}\Big] = \int\limits_{x_{t_i}}^{x_m} x f(x)\,dx.\tag{9}$$

Если число отрезков равно двум ($n = 2$), то из (8) и (9) получим

$$k_1 - k = \frac{2}{(x_m - x_{t_1})^2}\int\limits_{x_{t_1}}^{x_m} f(x)\,dx,$$
$$k_1 - k = \frac{6}{(x_m - x_{t_1})^2(2x_m - x_{t_1})}\int\limits_{x_{t_1}}^{x_m} x f(x)\,dx.\tag{10}$$

Система уравнений (10) для определения k_1 и x_{t_1} точно совпадает с результатами E. I. Ergin'a [9].

Решая совместно уравнения (8) и (9), находим значения x_{t_i}, k_i ($i = 1, 2, \ldots, n-1$).

Интегралы, стоящие в правых частях (8) и (9), находятся довольно просто, если даже $f(x)$ является многочленом любой степени.

После нахождения x_{t_i} и k_i ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) по формулам (3) определяются линейные функции

$$g_i(x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда, как это видно из (2), остается проинтегрировать систему линейных дифференциальных уравнений с соответствующими начальными условиями:

$$\text{при } t = 0 \quad x_1(0) = x(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}(0) = 0;$$

$$\text{при } t = t_i \quad x_{i+1}(t_i) = x_i(t_i), \quad \dot{x}_{i+1}(t_i) = \dot{x}_i(t_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Итак, нелинейное дифференциальное уравнение (1) заменено системой линейных дифференциальных уравнений, решения которых припасовываются в точках перехода от одного отрезка характеристик к другому. Что касается выбора наибольшего отклонения x_m, через которое определяется k_i и x_{t_i}, то можно показать, что в качестве x_m можно выбрать линейное наибольшее отклонение. Но в сильно нелинейных колебательных системах действительное наибольшее отклонение может сильно отличаться от линейного наибольшего отклонения.

В таких случаях можно применить итерационный процесс.

В качестве примера рассмотрим уравнение синхронного двигателя в следующем виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} + \sin x = R \sin m\omega t, \tag{11}$$

где α — малая величина (для определенности берем $\alpha \approx 0$). В разложении функции $\sin x$ ограничимся тремя первыми членами. Тогда (11) примет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} = R \sin m\omega t. \tag{12}$$

Берем $n = 3$, т. е. нелинейную характеристику аппроксимируем тремя отрезками, непрерывно соединенными между собой. Получим:

для $|x| < x_{t_1}$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + x_1 = R \sin m\omega t; \tag{13'}$$

для $x_{t_1} < |x| < x_{t_2}$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + k_1x_2 + x_{t_1}(1 - k_1) = R \sin m\omega t; \tag{13''}$$

$$\frac{d^2x_3}{dt^2} = k_2x_3 + x_{t_1}(1 - k_1) + x_{t_2}(k_1 - k_2) = R \sin m\omega t \tag{13'''}$$

для $x_{t_2} < |x| < x_{t_3}$.

Начальные условия выберем следующим образом:

$$x_1(0) = x(0) = 0, \qquad \dot{x}_1(0) = \dot{x}(0) = 0 \tag{14'}$$

при $t = 0$;

$$x_2(t_1) = x_1(t_1), \qquad \dot{x}_2(t_1) = \dot{x}_1(t_1) \tag{14''}$$

при $t = t_1$;

$$x_3(t_2) = x_2(t_2), \qquad \dot{x}_3(t_2) = \dot{x}_2(t_2) \tag{14'''}$$

при $t = t_2$.

Надо определить x_{t_1}, x_{t_2}, k_1, k_2.

Пусть

$$x_{t_1} = ax_m, \qquad x_{t_2} = bx_m, \tag{15}$$

где a и b — коэффициенты пропорциональности.

Тогда из выражений (8) и (9) получаем

$$a \approx 0{,}42, \qquad b \approx 0{,}53. \tag{16}$$

Находим, что

$$x_m = \frac{R}{|1-m^2|}. \tag{17}$$

Следовательно,

$$x_{t_1} = \frac{0{,}42R}{|1-m^2|}, \quad x_{t_2} = \frac{0{,}53\,R}{|1-m^2|}. \tag{18}$$

Из (8) и (9) имеем

$$k_1 = 1 + \frac{R^2}{9{,}12\,|1-m^2|^2}\left[\frac{0{,}012\,R^2}{30\,|1-m^2|^2} - 0{,}0369\right], \tag{19}$$

$$k_2 = 1 + \frac{R^2}{|1-m^2|^2}\cdot\left[\frac{0{,}0544\,R^2}{|1-m^2|^2} - 0{,}0152\right]. \tag{20}$$

Интегрируя систему линейных дифференциальных уравнений (13) при учете начальных условий (14) получаем желаемый результат.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Андронов, С. Э. Хайкин, А. А. Витт, Теория колебаний, 2 изд., Физматгиз, М., 1959.
2. Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, Гостехиздат, 1947.
3. Н. Н. Боголюбов и Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, 1958.
4. Ю. А. Митропольский, Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах, Изд-во УССР, Киев, 1955.
5. Э. Ф. Файзибаев, К вопросу о построении стационарных решений для некоторых колебательных систем с одной степенью свободы, УМЖ, т. 14, № 3, 1962.
6. Э. Ф. Файзибаев, К вопросу о построении нестационарных решений для некоторых колебательных систем с одной степенью свободы, Известия АН УзССР, сер. физ.-матем. наук, № 5, 1962.
7. А. В. Шляхтин и Н. И. Борткевич, К определению вынужденных колебаний системы с нелинейной восстанавливающей силой, Труды Ин-та машиноведения АН СССР, семинар по теории машин и механизмов, 19, № 74, 1959, 58—67.
8. Н. Д. Папалекси, Собрание трудов, Изд-во АН СССР, 1948.
9. E. I. Ergin, Transient response of a nonlinear sustem by a bilinear approximation method, J. of Appl. Mech., 23, N 4, 1956.

Поступила 8.X 1962 г.
Киев