Аналитические свойства амплитуд рождения в одночастичном приближении как функции двух переменных

В. И. Фущич

1. Исследованию аналитических свойств амплитуд рождения как по теории возмущений, так и на основе аксиом теории поля посвящено в последнее время довольно много работ [1—4]. Это связано, во-первых, с попыткой учета высших вкладов в условие унитарности, во-вторых, с различными приближенными методами (метод Чу и Лоу, одночастичные приближения), которые основываются на аналитических свойствах амплитуд рождения.

Зная аналитические свойства амплитуд рождения, можно судить о возможности применения метода Чу и Лоу [5]. Этот метод, как известно, основан на экстраполяции функции $f(s, t)$, которая определенным образом связана с вкладом в амплитуду рождения от диаграммы рис. 1 [5], заданной в физической области относительно переменной $t (t < 0)$ при фиксированном s, до точки $t = \mu^2$, где μ — масса π-мезона, если рассматривается процесс $\pi + n \to n + \pi + \pi$.

Очевидно, что для допустимости такой экстраполяционной процедуры функция $f(s, t)$ должна быть аналитичной в области $t \leqslant \mu^2$.

В настоящей заметке исследуются аналитические свойства амплитуды простого рождения как функции двух переменных (t и t_{24}) в одночастичном приближении, т. е. вклада в амплитуду рождения от диаграммы рис. 1; обсуждается вопрос о применимости метода Чу и Лоу для процесса $\pi + n \to$

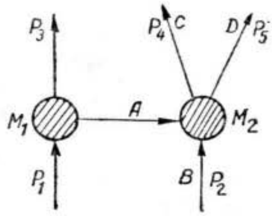

Рис. 1.

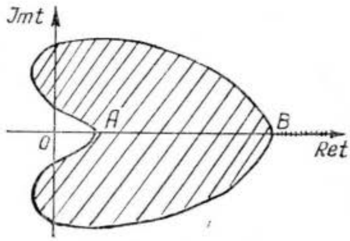

Рис. 2.

$\to n + \pi + \pi$. Исследование проводится с помощью интегрального представления Йоста — Лемана — Дайсона.

2. Вклад в амплитуду рождения от диаграммы рис. 1 запишется следующим образом:

$$T^{(5)} = V(p_1^2,\ p_3^2,\ t) T^{(4)}(p_2^2,\ p_4^2,\ p_5^2,\ t,\ t_{24},\ s_{45}) \frac{1}{t - \mu^2}, \tag{1}$$

где $s_{45} = (p_4 + p_5)^2 \equiv s$, $t_{24} = (p_2 - p_4)^2$, $t_{13} = (p_1 - p_3)^2 \equiv t$.
Из (1) видно, что областью аналитичности T^5, например, относительно переменной t, будет пересечение областей аналитичности функций $V(t)$ и $T^4(t)$. Поэтому для полноты изложения придется остановиться на аналитических свойствах вершинной функции $V(t)$. В дальнейшем будем предполагать, что $p_1^2 = p_3^2 = m^2$— масса нуклона, а все другие частицы — мезоны.

Хорошо известно, что, исходя из аксиом теории поля (лоренцвариантности, причинности и спектральности), удается доказать дисперсионные соотношения только для $\mu > (\sqrt{2} - 1)m$, т. е. для нефизических масс. Это означает, что в комплексной окрестности точки $t = 4\mu^2$ функция $V(t)$ может иметь особенности. Эти особенности были исследованы Эмме [6] с помощью так называемого „прямого представления" вершинной функции, т. е.

$$V(z_1,\ 4z_2,\ t) = \int\limits_0^1 d\xi \int\limits_{\xi-1}^{\xi+1} d\eta \int\limits_{k_1}^{\infty} dk \times$$

$$\times \frac{\varrho(k,\ \xi,\ \eta,\ 4z_2)}{[2k^2 + 2(1 + \xi^2 - \eta^2)z_2^2 - (z_1 + t) + \eta(z_1 - t)]^2 - \xi^2 \lambda(z_1,\ 4z_2,\ t)}, \tag{2}$$

где

$$k_1 = \max\{0;\ a - z_2[(1 + \eta)^2 - \xi^2]^{1/2};\ c - z_2[(1 - \eta)^2 - \xi^2]^{1/2}\}. \tag{3}$$

В нашем частном случае $a = b = m + \mu$, $c = 2\mu$, $2z_2 = m$.

Приравняв знаменатель выражения (2) к нулю, получим множество точек в плоскости t, в которых $V(t)$ может иметь особенности. Это множество будет следующим:

$$\mathrm{Re}t = 2z_2 \frac{(1+\eta)[\gamma^2-(1-\eta)^2-\xi^2]-4\xi^2}{(1+\eta)^2-\xi^2}, \tag{4}$$

$$\mathrm{Im}t = -(\mathrm{Re}t)^2 + \frac{\{\mathrm{Re}t\,[(1+\eta)^2-\xi^2]+8\xi^2 z_2\}^2}{(1+\eta)^2[(1+\eta)^2-\xi^2]}, \tag{5}$$

где $\gamma \geqslant \frac{k_1}{z_2}$.

Приведем качественную картину области аналитичности. Координаты точек $(\mathrm{Re}t)_A = \frac{4m\mu^2}{2m-\mu}$ и $(\mathrm{Re}t)_B = \frac{m^2(2m+\mu)}{2\mu}$ (см. рис. 2).

Здесь важно отметить, что $V(t)$ аналитична вдоль отрицательной части действительной оси, включая точку $t=2\mu^2$. Однако появление комплексных особенностей вблизи точки $t=\mu^2$ может отрицательно повлиять на практическое осуществление экстраполяционной процедуры Чу — Лоу.

3. Исследуем теперь аналитические свойства функции T^4. Амплитуду процесса $A+B \to C+D$ можно записать в виде

$$T^{(4)} = -\int dx \exp\left[i\,\frac{p_1-p_3-p_2}{2}x\right] < p_4 p_5 \,\mathrm{out}\,|\,R' A\left(\frac{x}{2}\right) A\left(-\frac{x}{2}\right) 0 >. \tag{6}$$

Следует особо подчеркнуть, что выражение (6) определяет T^4 не только для тех векторов $p_1-p_3 \equiv k$ и p_2, которые лежат на массовой оболочке, но и для тех векторов, для которых интеграл (6) существует. Это обстоятельство дает возможность рассматривать $(p_1-p_3)^2=t$ как независимую комплексную переменную.

С помощью аналогичных рассуждений, как и в [7] для случая упругого рассеяния, имеем:

$$T^{(4)} = \frac{1}{2\pi}\int \frac{du\,d\varkappa^2 \varphi(u, \varkappa^2, p_4, p_5)}{\left[\frac{1}{2}(k-p_2)-u\right]^2-\varkappa^2}, \tag{7}$$

где φ — весовая функция, обращающаяся в нуль вне области $0 \leqslant u \leqslant \frac{s}{2}^{1/2}$; $-\frac{s}{2}^{1/2}+u \leqslant u_0 \leqslant \frac{s}{2}^{1/2}-u$;

$$\varkappa \geqslant \max\left[0;\ m_1-\sqrt{\left(\frac{s}{2}^{1/2}-u_0\right)^2-u^2};\ m_2-\sqrt{\left(\frac{s}{2}^{1/2}-u_0\right)^2-u^2}\right]. \tag{8}$$

Выбрав систему центра масс $\vec{p}_4+\vec{p}_5=0$ и вводя полярные координаты

$\vec{p}_4 = |\vec{p}_4|(1,\ 0,\ 0)$, $\vec{k} = K(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$, $\bar{u} = u(\sin\beta\cos\alpha,\ \sin\beta\sin\alpha,\ \cos\beta)$,

перепишем выражение (7) в виде:

$$T = \frac{-1}{4\pi K(s,\ t)}\int du_0 \int u\,du \int d\varkappa^2 \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} d\beta\, \frac{\varphi(u_0,\ u^2,\ \cos\alpha\sin\beta,\ \varkappa^2,\ s)}{X(s,\ t)-\cos(\theta-\alpha)}, \tag{9}$$

где

$$X(s,\ t) = \frac{K^2(s,\ t)+u^2+\varkappa^2-\left(u_0+\frac{\mu^2-t}{2s^{1/2}}\right)^2}{2K(s,\ t)u\sin\beta}, \tag{10}$$

$$K^2 = \frac{(s + \mu^2 - t)^2 - 4\mu^2 s}{4s}. \qquad (11)$$

Поскольку вся зависимость от t и $\cos\theta$ (s — фиксировано) выделена в знаменателе, то $T^{(4)}$ может иметь особенности за счет нулей знаменателя выражения (9), а также при тех t, для которых $K(s, t) = 0$, т. е. при

$$t = (s^{1/2} \pm \mu)^2. \qquad (12)$$

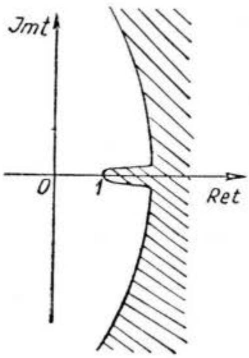

Рис. 3.

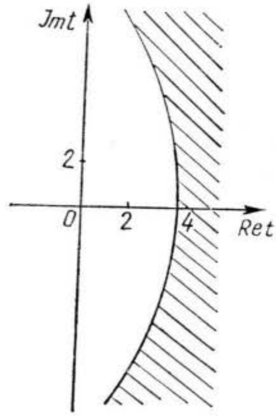

Рис. 4.

Для определения области аналитичности $T^{(4)}$ рассмотрим такие случаи:
1) $-1 \leqslant \cos\theta \leqslant 1$, t — комплексное;
2) $-\infty \leqslant t < m^2$, $\cos\theta$ — комплексное;
3) t и $\cos\theta$ — комплексные.

1) В этом случае знаменатель выражения (9) может обращаться в нуль, когда

$$-1 \leqslant X(s, t) \leqslant 1. \qquad (13)$$

Чтобы найти границу области аналитичности относительно переменной t, необходимо из (10) выразить t как функцию X, u_0, u, $\varkappa^2$, $\sin\beta$ и найти минимальное t, при котором знаменатель может еще обращаться в нуль, причем следует учесть условия (8) и (13). В работе Дремина [8] было проведено такое детальное исследование для мнимой части амплитуды мезон-нуклонного упругого рассеяния на нулевой угол. Так как знаменатель выражения (9) совпадает с одним из знаменателей работы [8] [см. формулу (5)], то мы приведем здесь только окончательный результат — вид границы области аналитичности (в единицах μ) с учетом, что в нашем случае $m_1 = m_2 = 2\mu$, и при условии (12).

Из приведенных рисунков 3 и 4[1] вытекает, что при $s \geqslant 9\mu^2$ между физической областью переменной t ($t \leqslant 0$) и полюсом в точке $t = \mu^2$ $T^{(5)}$ не имеет других особенностей на действительной оси, а это означает, что и функция $f(s, t)$ не будет иметь особенностей в этой же области.

2) Если t фиксировано в вышеуказанной области, то $T^{(4)}$ как функция $\cos\theta$[2] аналитична в эллипсе с полуосями $x_0(s, t)$, $\sqrt{x_n^2(s, t) - 1}$, где

---

[1] На рис. 3 незаштрихованная область — область аналитичности $T^{(4)}$ при $s = 4\mu^2$ вблизи точки $t = \mu^2$, на рис. 4 — вид области аналитичности $T^{(4)}$ при $s \geqslant 9\mu^2$ вблизи точки $t = \mu^2$.

[2] $\cos\theta$ — линейная функция t_{24}.

$$x_0(s,\ t) = \left\{1 + \frac{(m_1^2 - t)(m_2^2 - \mu^2)}{K^2(s,\ t)[s - (m_1 - m_2)^2]}\right\}. \tag{14}$$

Областью аналитичности $T^{(4)}$ в трехмерном пространстве переменных $\mathrm{Re}\,t$, $\mathrm{Re}\cos\theta$ и $\mathrm{Im}\cos\theta$ будет область, приведенная на рис. 5. Уравнением верхней части поверхности ($0 \leqslant \mathrm{Re}\,t \leqslant m_1^2$), приведенной на рис. 5, является поверхность эллипсоида

$$\frac{(\mathrm{Re}\cos\theta)^2}{\tilde{x}_0^2} + \frac{(\mathrm{Im}\cos\theta)^2}{\tilde{x}_0^2 - 1} + \frac{\mathrm{Re}\,t}{m_1^4} = 1, \tag{15}$$

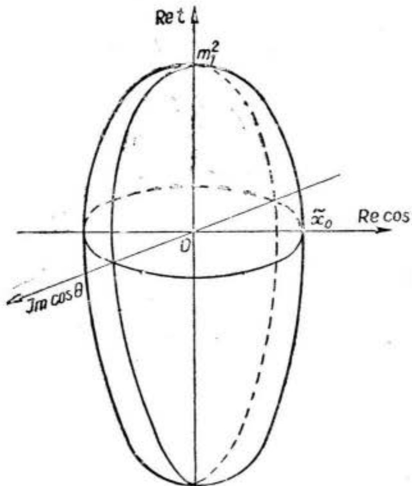

Рис. 5.

а уравнением нижней части ($-\infty \leqslant \mathrm{Re}\,t \leqslant 0$) — уравнение поверхности эллипсоида

$$\frac{(\mathrm{Re}\cos\theta)^2}{\tilde{x}_0^2} + \frac{(\mathrm{Im}\cos\theta)^2}{\tilde{x}_0^2 - 1} + \frac{(\mathrm{Re}\,t)^2}{\infty} = 1, \tag{16}$$

где

$$\tilde{x}_0 = \left\{1 + \frac{m_1^2(m_2^2 - \mu^2)}{K^2(s,\ 0)[s - (m_1 - m_2)^2]}\right\}. \tag{17}$$

Следует заметить, что все эти рассуждения справедливы при таких s, при которых $K^2(s,\ t) > 0$ и $s > (m_1 - m_2)^2$.

3) Чтобы избавиться от неоднозначности в знаменателе выражения (9) ($1/K^2$), установим область аналитичности не для самой функции $T^{(4)}$, а для некоторой комбинации ее, а именно:

$$\hat{T}^{(4)} = T^{(4)}[s,\ \cos(\theta - \pi),\ t] - T^{(4)}[s,\ \cos\theta,\ t]. \tag{18}$$

После несложных выкладок получаем, что $T^{(4)}$ будет аналитической функцией комплексных переменных t и $\cos\theta$ для множества тех точек, для которых имеют место условия:

$$(\mathrm{Re}\cos\theta)^4 - 6(\mathrm{Re}\cos\theta)^2(\mathrm{Im}\cos\theta)^2 + (\mathrm{Im}\cos\theta)^2 + (\mathrm{Re}\,X^2)^2 - (\mathrm{Im}\,X^2)^2 -$$

$$- 2\mathrm{Re}\, X^2 \{[(\mathrm{Re}\cos\theta)^2 - (\mathrm{Im}\cos\theta)^2]\cos 2\alpha + \sin^2\alpha\} +$$
$$+ 4\,\mathrm{Im}\, X^2\, \mathrm{Re}\cos\theta\, \mathrm{Im}\cos\theta\, \cos 2\alpha - 2\,[(\mathrm{Re}\cos\theta)^2 - (\mathrm{Im}\cos\theta)^2]\sin^2\alpha \neq 0,$$
$$(\mathrm{Re}\, X^2)(\mathrm{Im}\, X)^2 - 2\,(\mathrm{Re}\cos\theta)(\mathrm{Im}\cos\theta)\,\mathrm{Re}\, X^2\cos 2\alpha - \mathrm{Im}\, X^2\, \{[(\mathrm{Re}\cos\theta)^2 -$$
$$- (\mathrm{Im}\cos\theta)^2]\cos 2\alpha + \sin^2\alpha\} - 2\,(\mathrm{Re}\cos\theta)(\mathrm{Im}\cos\theta)\sin^2\alpha \neq 0. \qquad (19)$$

4. Для полного ответа на вопрос о применимости метода Чу и Лоу необходимо было бы исследовать аналитические свойства амплитуд рождения в высших приближениях (двухчастичном, трехчастичном и т. д.), но поскольку такая задача связана с принципиальными трудностями, то обычно ограничиваются только диаграммами в одночастичном приближении, т. е. полагают, что особенности, которые могут возникнуть при учете высших приближений, лежат намного выше, чем полюс в точке $t = \mu^2$ функции $T^{(5)}$. Такое приближение, по-видимому, применимо, как это указано в [5], при малых передачах импульса (порядка μ). Однако, если ограничиться только диаграммой рис. 1, то особенности $T^{(5)}$, которые могут возникнуть за счет вершин M_1 и M_2, лежат выше полюса в точке $t = \mu^2$ для процесса $\pi + n \rightarrow n + \pi + \pi$ при $s \geqslant 9\,\mu^2$ и $t_{24} \leqslant 0$ (физическая область), можно заключить, что и функция $f\ (s,\ t)$ при $s \geqslant 9\mu^2$ будет аналитична в области $t \leqslant 2\mu^2$, т. е. метод Чу и Лоу применим для вышеуказанного процесса.

Полученные области аналитичности функции $T^{(5)}$ относительно переменных t и t_{24} значительно больше областей аналитичности, которые были получены Асколи [3], что естественно, поскольку нами рассмотрено только одночастичное приближение полной амплитуды рождения.

Эти результаты могут быть обобщены на случай, когда из вершины M_2 выходит n линий.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. Tarsky, J. Math. Phys. **3**, 1, 1962.
2. R. Ascoli, A. Minguzzi, Phys. Rev., **118**, 1960, 1435.
3. R. Ascoli, Nuvo Cim., **18**, 1960, 754.
4. Y. S. Kim, Phys. Rev., **124**, 1961, 1632.
5. G. F. Chew, F. E. Low, Phys. Rev., 1640, 1959, 1640.
6. R. Oehme, Phys. Rev., **117**, 1960, 1151.
7. H. Lehman, Nuovo Cim., **10**, 1958, 579.
8. И. М. Дремин, ЖЭТФ, **41**, 1961, 821.

Поступила 29.X 1962 г.
Киев