ОТДЕЛ КРАТКИХ СООБЩЕНИЙ

К операционной теории И. З. Штокало решения линейных дифференциальных уравнений

Ву Туан

В монографии И. З. Штокало «Операционные методы и их развитие в теории линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами» (Изд-во АН УССР, К., 1961) изложена теория, разработанная автором на случай линейных дифференциальных уравнений с коэффициентами, мало отличающимися от постоянных.

В данной заметке делается попытка продолжения некоторых результатов, содержащихся в названной книге.

В третьей главе указанной монографии рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} - [A + \varepsilon f(t)]\, x = Ce^{pt}, \tag{1}$$

где A — постоянная матрица, $f(t)$ — матрица с ограниченными элементами, C — постоянный вектор, p и ε — комплексные параметры, причем второй из них по модулю достаточно мал.

При условии, что вещественные части корней $s_1, s_2, \ldots, s_n$ характеристического уравнения

$$\mathrm{Det}\, \| sE - A \| = 0 \tag{2}$$

не совпадают с вещественной частью параметра p, доказано существование единственного решения уравнения (1) вида

$$x = \xi(t, p, \varepsilon)\, e^{pt},$$

в котором

$$|\xi(t, p, \varepsilon)| \leqslant \mathrm{const} \quad (-\infty, +\infty).$$

Нам удалось показать, что можно решить эту задачу также в случае, когда C зависит от t, а именно:

$$\frac{dx}{dt} = [A + \varepsilon f(t)]\, x = g(t)\, e^{pt}, \tag{3}$$

где $g(t)$ — вектор с ограниченными элементами.

Теорема 1. *Если вещественные части корней характеристического уравнения* (2) *и параметра* p *не совпадают, то уравнение*

$$\frac{dx}{dt} - [A + \varepsilon f(t)]\, x = g(t)\, e^{pt}, \tag{4}$$

где $f(t)$ — ограниченная матрица, $g(t)$ — ограниченный вектор на всей вещественной оси, имеет единственное решение вида

$$x = \xi(t, p, \varepsilon)\, e^{pt}, \tag{5}$$

где

$$|\xi(t, p, \varepsilon)| \leqslant \text{const} \quad (-\infty, +\infty).$$

Для доказательства теоремы рассмотрим уравнение

$$\xi = \xi_0 + \varepsilon \left\{ \int\limits_{-\infty}^{t} v_{-}(t-\tau)\, f(\tau)\, \xi\, d\tau - \int\limits_{t}^{+\infty} v_{+}(t-\tau)\, f(\tau)\, \xi\, d\tau \right\}, \tag{6}$$

где

$$\xi_0 = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{t} v_{-}(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau - \int\limits_{t}^{+\infty} v_{+}(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau \right\}.$$

Согласно лемме 1 главы III [1], ξ_0 ограничена. Пользуясь методом И. З Штокало доказательства теоремы 1 главы III монографии [1], можно полностью доказать нашу теорему.

Теорема 2 *Если в уравнении* (4) *матрица* $f(t)$ *квазипериодическая, то вектор* $\xi(t, p, \varepsilon)$, *являющийся множителем в решении*

$$x = \xi(t, p, \varepsilon)\, e^{pt} \tag{7}$$

уравнения (4), *будет также квазипериодическим.*

Принимая во внимание метод доказательства теоремы 2 главы III [1], а также то, что

$$\xi_0 = \int\limits_{-\infty}^{t} v_{-}(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau - \int\limits_{t}^{+\infty} v_{+}(t-\tau)\, g(\tau) d\tau$$

является квазипериодической функцией согласно лемме 2 главы III [1], можно полностью установить высказанное нами утверждение.

В связи с изложенными выше двумя теоремами, две общие теоремы, сформулированные в § 10, 11, могут быть выражены следующим образом.

Теорема 3. *Пусть* A — *постоянная матрица,* N, M *и* α — *положительные числа.*

Тогда этим величинам можно сопоставить такое $K > 0$, *что имеет место следующее утверждение: дифференциальное уравнение в матричном виде*

$$\frac{dx}{dt} - [A + \varepsilon f(t)]\, x = g(t)\, e^{pt},$$

в котором на всей вещественной оси

$$|f(t)| < N, \quad |g(t)| < M,$$

а p *и* ε *представляют собой комплексные величины, удовлетворяющие неравенству*

$$|\varepsilon| < \frac{d(p)}{K}, \tag{8}$$

где

$$d(p) = \min |R(s_k - p)| > \alpha \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

(s_k — *корни уравнения* $\operatorname{Det} \| sE - A \| = 0$), *имеет одно единственное решение вида*

$$x = \xi(t, p, \varepsilon)\, e^{pt}$$

Вектор $\xi(t, p, \varepsilon)$ *является по отношению к переменной* t *ограниченным на всей вещественной оси, а относительно параметров* p *и* ε — *аналитическим в области* (8).

В случае, если $f(t)$ — *квазипериодическая матрица, то вектор* $\xi(t, p, \varepsilon)$ —

также квазипериодическая функция от t с частотами, являющимися линейными комбинациями частот матрицы $f(t)$.

Теорема 4. *Любым положительным N, M можно сопоставить такое $L > 0$, что имеет место утверждение: дифференциальное уравнение в матричном виде*

$$\frac{dx}{dt} - a(t)\,x = g(t)\,e^{pt},$$

в котором на всей вещественной оси

$$|a(t)| \leqslant N, \quad |g(t)| \leqslant M$$

и

$$|R(p)| \geqslant L,$$

имеет одно единственное решение вида

$$x = \omega(t, p)\,e^{pt},$$

где $\omega(t, p)$ — вектор, ограниченный относительно t в интервале $(-\infty, +\infty)$ и аналитический относительно параметра p в области

$$|R(p)| \geqslant L.$$

В случае, когда коэффициенты $a(t)$ квазипериодические, то $\omega(t, p)$ также квазипериодический относительно t с частотами, являющимися линейными комбинациями частот коэффициентов $a(t)$.

Замечание. Упомянутые выше рассуждения могут быть применены в случае решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка, на чем мы остановимся отдельно.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. З. Штокало, Операционные методы и их развитие в теории линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, Изд-во АН УССР, К., 1961.

Поступила 26.IV 1963 г.
Киев