Об однозначных решениях нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка и некоторые свойства вещественных периодических решений

А. В. Костин

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$y' = p_0(z) + p_1(z)\,y + \ldots + p_n(z)\,y^n, \qquad n \geqslant 2, \tag{1}$$

где z — комплексная переменная, $p_i(z)$ $(i = 0, \ldots, n)$ — целые функции от z (т. е. $p_i(z)$ однозначны и не имеют особенностей при конечных z), $p_n(z) \not\equiv 0$.

Известно (см. [1]), что решения уравнения (1) могут иметь в комплексной плоскости z подвижные особые точки типа критический или некритический полюс. Отсюда не следует, однако, что уравнение (1) не может иметь решений, которые являются целыми функциями (такие решения условимся называть в дальнейшем *ц*-решениями). Возникает вопрос: какое максимальное число *ц*-решений может иметь уравнение типа (1)? Ниже покажем, что поставленная задача может быть решена с помощью известной теоремы Пикара, которую удобно сформулировать здесь в следующем виде: всякая целая функция $f(z)$, не являющаяся тождественной константой, принимает в комплексной плоскости z любое значение, кроме, может быть, одного. В самом деле, для полинома это свойство следует из основной теоремы алгебры, а для случая, когда $f(z)$ — целая функция и не полином, высказанное утверждение вытекает из малой теоремы Пикара (см. [2]).

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 1. *Уравнение* (1) *при* $n \geqslant 2$ *не может иметь более чем* n *ц-решений.*

Доказательство. Допустим, что уравнение (1) имеет более чем n *ц*-решений. Возьмем тогда два какие-либо из этих решений, пусть это будут $y_1(z)$ и $y_2(z)$, и сделаем в уравнении (1) замену

$$\frac{y - y_1(z)}{y_2(z) - y_1(z)} = w, \tag{2}$$

где w — новая неизвестная функция. Характер замены (2) таков, что решению $y = y_1(z)$ соответствует решение $w(z) \equiv 0$, а решению $y = y_2(z)$ — решение $w(z) \equiv 1$. При этом знаменатель $y_2(z) - y_1(z)$ в левой части равенства (2) ни при каких конечных z не обращается в нуль в силу теоремы единственности решений, и потому каждому *ц*-решению уравнения (1) будет соответствовать также *ц*-решение нового уравнения и наоборот. Кроме того, замена (2) является линейной относительно y и w, и потому уравнение для w будет также уравнением типа (1). Учитывая сказанное, заключаем, что уравнение для w должно иметь вид

$$w' = w(w-1)(q_0(z) + q_1(z)w + \ldots + q_{n-2}(z)w^{n-2}), \tag{3}$$

причем нетрудно проверить, что $q_{n-2}(z) = p_n(z)[y_2(z) - y_1(z)]^{n-1} \not\equiv 0$.

Покажем, что единственными *ц*-решениями уравнения (3) могут быть только решения вида $w = c = \mathrm{const}$. В самом деле, если $w^*(z)$ есть некоторое *ц*-решение уравнения (3) и при этом $w^*(z) \not\equiv 0$ и $w^*(z) \not\equiv 1$, то в силу той же теоремы единственности это решение ни при одном z не может принимать значений 0 и 1. На основании теоремы Пикара *ц*-решение $w^*(z)$ должно быть константой, т. е. $w^*(z) \equiv c$. Но в таком случае это решение должно удовлетворять равенству

$$q_0(z) + q_1(z)c + \ldots + q_{n-2}(z)c^{n-2} \equiv 0 \tag{4}$$

при любых z. В силу условия $q_{n-2}(z) \not\equiv 0$ уравнение (4) не может иметь более чем $n-2$ решения. Поэтому максимальное число *ц*-решений для уравнения (3) равно n, и, следовательно, таким же свойством должно обладать и уравнение (1). Допущение о существовании большего числа *ц*-решений, таким образом, неверно.

Отметим два следствия, непосредственно вытекающие из доказательства теоремы 1.

Следствие 1. Уравнение (1) может иметь точно n *ц*-решений и может иметь меньше чем n *ц*-решений.

Следствие 2. Для любых трех *ц*-решений $y_1(z)$, $y_2(z)$, $y_3(z)$ уравнения (1) выполняется свойство

$$\frac{y_3(z) - y_1(z)}{y_2(z) - y_1(z)} \equiv c = \mathrm{const}, \tag{5}$$

где c зависит, очевидно, от выбора рассматриваемых решений.

Чтобы сформулировать результат более общий, чем теорема 1, введем одно определение.

Определение. Условимся функцией класса Π называть каждую функцию $f(z)$, однозначную во всей комплексной плоскости и аналитическую всюду, кроме, может быть, точек $z=0$ и $z=\infty$*.

Подчеркнем, что для функции $f(z)$ класса Π не обязательно, чтобы обе точки $z=0$ и $z=\infty$ одновременно являлись особыми точками этой функции.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Уравнение* (1), *в котором коэффициенты* $p_i(z)$ $(i=0,\ldots,n)$ *являются функциями класса* Π, *при* $n \geqslant 2$ *не может иметь более чем* n *частных решений, которые также являются функциями класса* Π, *и между любыми тремя такими решениями существует соотношение типа* (5).

Доказательство. Будем рассуждать так же, как и в случае теоремы 1. Пусть уравнение (1) имеет более чем n частных решений класса Π и пусть $y_1(z)$ и $y_2(z)$ — два из них. Применим к уравнению (1) преобразование (2). Совершенно очевидно, что это преобразование каждую функцию $y(z)$ класса Π преобразует в функцию $w(z)$ того же класса и наоборот. Это легко следует из того, что при любых $z \neq 0$ и $z \neq \infty$ $y_1(z)$ и $y_2(z)$ аналитичны и при этом $y_2(z)-y_1(z) \neq 0$.

Рассмотрим, далее, преобразованное уравнение (3). Ясно, что коэффициенты $q_i(z)$ $(i=0,\ldots,n-2)$ этого уравнения будут функциями класса Π. Пусть $w^{**}(z)$ есть некоторое решение класса Π уравнения (3), причем $w^{**}(z) \not\equiv 0$ и $w^{**}(z) \not\equiv 1$. Рассмотрим все возможные случаи. Допустим, что хотя бы одна из точек $z=0$ и $z=\infty$ является для $w^{**}(z)$ существенно особой. Тогда в окрестности такой точки, т. е. при некотором z_0, $z_0 \neq 0$, $z_0 \neq \infty$, $w^{**}(z)$ на основании малой теоремы Пикара обязательно примет либо значение 0, либо значение 1. Так как z_0 не является особой точкой для коэффициентов $q_i(z)$ $(i=0,\ldots,n-2)$, то в силу теоремы единственности решений мы должны иметь либо $w^{**}(z)\equiv 0$, либо $w^{**}(z)\equiv 1$. Полученное противоречие показывает, что $w^{**}(z)$ не может иметь существенно особых точек. Но в таком случае $\overset{**}{w}_{(z)}$ является рациональной функцией (см. [2], стр. 183), т. е. $w^{**}(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, где $P(z)$, $Q(z)$ — некоторые полиномы, которые всегда можно предполагать взаимно простыми (в противном случае нужно произвести сокращение общих множителей, причем полученное после такого сокращения решение мы не будем отличать от исходного). Из теоремы единственности и из определения функций класса Π следует, что равенства $w^{**}(z)=0$ и $w^{**}(z)=\infty$ возможны только при $z=0$ или $z=\infty$, и поэтому степени многочленов $P(z)$ и $Q(z)$ не могут быть больше 1. Легко проверить, что возможны лишь следующие варианты:

$$P(z)=\begin{cases}\text{либо } c_0,\\ \phantom{\text{либо }} c_1 z\end{cases} \quad Q(z)=\begin{cases}\text{либо } d_0,\\ \phantom{\text{либо }} d_1 z\end{cases} \quad c_i,\ d_i=\mathrm{const},\ c_i\neq 0,\ d_i \neq 0,\ i=0,1.$$

Поэтому для $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ возможны только такие значения: $\dfrac{c_0}{d_0}$, $\dfrac{c_0}{d_1 z}$, $\dfrac{c_1 z}{d_0}$, $\dfrac{c_1 z}{d_1 z}$. В первом и четвертом случаях получаем, что $\dfrac{P(z)}{Q(z)} \equiv \mathrm{const}$. Покажем, что второй и третий случаи невозможны. Действительно, каждая из функций $\dfrac{c_0}{d_1 z}$ и $\dfrac{c_1 z}{d_0}$ принимает значение 1 при конечном z, отличном

---

* Вместо $z=0$ можно было бы рассматривать любую другую точку $z=z^*$.

от 0, и потому должны иметь либо $\frac{c_0}{d_1 z} \equiv 1$, либо $\frac{c_1 z}{d_0} \equiv 1$, что невозможно. Таким образом, единственными решениями класса Π уравнения (3) могут быть только тождественные константы. Используя те же рассуждения, что и в теореме 1, отсюда легко получаем справедливость теоремы 2.

Укажем теперь одно тождество, которому должны удовлетворять любые три решения $y_1(z)$, $y_2(z)$ и $y_3(z)$ класса Π уравнения (1). В силу теоремы 2 имеем при любых $z \neq 0$

$$\frac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} \equiv c = \text{const}^*.$$

С помощью дифференцирования отсюда получаем равенство

$$(y_2 - y_1)(y_3' - y_1') - (y_3 - y_1)(y_2' - y_1') \equiv 0 \quad (z \neq 0),$$

которое с учетом соотношений $y_i' = p_0 + p_1 y_i + p_2 y_i^2 + \ldots + p_n y_i^n$ $(i = 1, 2, 3)$ можно записать в следующем виде

$$(y_2 - y_1) \sum_{k=1}^{n} p_k (y_3^k - y_1^k) - (y_3 - y_1) \sum_{k=1}^{n} p_k (y_2^k - y_1^k) \equiv 0 \quad (z \neq 0).$$

Произведем деление последнего равенства на $(y_2 - y_1)(y_3 - y_1) \neq 0$ (при $z \neq 0$), используя очевидное тождество

$$\frac{a^k - b^k}{a - b} = a^{k-1} + a^{k-2} b + \ldots + a b^{k-2} + b^{k-1}.$$

В результате будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n} p_k (y_3^{k-1} + y_3^{k-2} y_1 + \ldots + y_3 y_1^{k-2} + y_1^{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} p_k (y_2^{k-1} + $$
$$+ y_2^{k-2} y_1 + \ldots + y_2 y_1^{k-2} + y_1^{k-1}) \equiv 0 \quad (z \neq 0).$$

Нетрудно видеть, что первые слагаемые в обеих суммах равны p_1, и потому можем написать

$$\sum_{k=2}^{n} p_k [y_3^{k-1} - y_2^{k-1} + (y_3^{k-2} - y_2^{k-2}) y_1 + \ldots + (y_3 - y_2) y_1^{k-2}] \equiv 0 \quad (z \neq 0).$$

Деля это равенство на $y_3 - y_2 \neq 0$ (при $z \neq 0$), окончательно получаем

$$\sum_{k=2}^{n} p_k (S_{k-2} + S_{k-3} y_1 + \ldots + S_0 y_1^{k-2}) \equiv 0 \quad (z \neq 0),$$

где $S_k = y_3^k + y_3^{k-1} y_2 + \ldots + y_3 y_2^{k-1} + y_2^k$, $S_0 = 1$.

Коэффициент при p_2 в этом равенстве тождественно равен 1, и потому ясно, например, что если существует такая точка z^{**}, в которой $p_i(z^{**}) = 0$ $(i = 3, \ldots, n)$, то обязательно должно выполняться также и равенство $p_2(z^{**}) = 0$. Таким образом, мы получили необходимое условие того, чтобы уравнение (1) имело не менее трех частных решений класса Π. Если это условие не выполнено, то уравнение (1) может иметь не более двух частных решений класса Π.

---

* Аргумент z для сокращения записи в дальнейшем опускаем.

Рассмотрим в заключение дифференциальное уравнение

$$y' = r_0(x) + r_1(x) y + \ldots + r_n(x) y^n, \quad n \geqslant 2, \tag{6}$$

где x — действительная переменная, $r_i(x) \, (i = 0, \ldots, n)$ — вещественные периодические, периода 2π, функции, представимые в виде рядов

$$r_i(x) = A_{0i} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{ki} \sin kx + B_{ki} \cos kx \ \ (i = 0, \ldots, n), \tag{7}$$

коэффициенты которых удовлетворяют условию $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|A_{ki}|} = 0$, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|B_{ki}|} = 0 \ \ (i = 0, \ldots, n)$ (*).

Если уравнение (6) имеет вещественные периодические решения, то эти решения, как известно, необходимо должны иметь период 2π (см. [3]) и каждое такое решение, очевидно, может быть разложено в ряд типа (7). Пусть $y_0(x)$ — некоторое такое решение

$$y_0(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin kx + \beta_k \cos kx. \tag{8}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Уравнение* (6) *не может иметь более чем n периодических решений типа* (8), *коэффициенты* α_k *и* $\beta_k \, (k = 1, 2, \ldots)$ *которых удовлетворяют условию* (*), *и между любыми тремя такими решениями имеет место соотношение типа* (5).

Доказательство. Сделаем в уравнении (6) замену независимой переменной, полагая $e^{ix} = z$. В результате получим уравнение вида

$$izy' = r_0^*(z) + r_1^*(z) y + \ldots + r_n^*(z) y^n, \quad n \geqslant 2, \tag{9}$$

где

$$r_i^*(z) = A_{0i}^* + \sum_{k=1}^{\infty} A_{ki}^* z^k + B_{ki}^* z^{-k} \qquad (i = 0, \ldots, n), \tag{10}$$

причем $A_{ki}^* = \frac{1}{2i}(A_{ki} + iB_{ki})$, $B_{ki}^* = \frac{1}{2i}(iB_{ki} - A_{ki}) \, (i = 0, \ldots, n; \ k = 1, 2, \ldots)$.
Совершенно очевидно, что ряды (10) будут сходиться при любых $z \neq 0$. Решению (8), с условием (*), уравнения (6) будет соответствовать решение вида

$$y_0^*(z) = \alpha_0^* + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^* z^k + \beta_k^* z^{-k} \tag{11}$$

уравнения (9), причем ряд (11) будет сходиться при любых $z \neq 0$. Уравнение (9) удовлетворяет всем условиям теоремы 2, откуда и вытекает справедливость теоремы 3.

Заметим (см. [4]), что общее число периодических решений уравнения (6) может быть и больше чем n за счет наличия таких решений, которые не удовлетворяют условию (*).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.

2. И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, ГТТИ, М.—Л., 1932.

3. С. А. Самедова, Критерии существования и единственности периодического решения уравнения $y' = f(x, y)$. Труды Ин-та физики и математики АН Азерб. ССР, серия матем., т. 6, 1953, 25.

4. В. А. Плисс, О числе периодических решений уравнения с полиномиальной правой частью, ДАН СССР, т. 127 № 5, 1959, 965.

Поступила 24.XII 1962 г.
Одесса