Внутренний радиус области и некоторые его свойства

И. П. Митюк

Понятие внутреннего радиуса области было введено Г. Сеге [1]. Оно является обобщением важного понятия конформного радиуса на случай многосвязных областей. Пойа и Сеге установили ряд свойств внутреннего радиуса. В частности, они показали, что при симметризации внутренний радиус области не убывает. В настоящей заметке устанавливается характер изменения внутреннего радиуса при отображении области с помощью регулярных функций. Подобный вопрос в случае односвязных областей (круга) был решен У. К. Хейманом [3]. Отметим, что доказанные в настоящей заметке теоремы 1 и 2 дополняют результат Хеймана даже в случае односвязных областей. Объединение полученного результата с симметризационным методом Пойа и Сеге позволяет распространить принцип симметризации Хеймана в дополненной форме на случай многосвязных областей [6].

1. Определение внутреннего радиуса области. Пусть G — конечносвязная область, ограниченная кривыми Жордана, z — конечная точка G, а $g_G(z, z_0)$ — функция Грина области G с полюсом в точке $z = z_0$.

Определение 1. Внутренним радиусом $r(G, z_0)$ области G относительно точки $z = z_0$ ([1], стр. 335) называется величина, определяемая следующим равенством:

$$\log r(G, z_0) = \lim_{z \to z_0} [g_G(z, z_0) + \log|z - z_0|]. \tag{1}$$

Рассмотрим некоторые свойства внутреннего радиуса областей указанного выше вида.

1) Если область $G_1 \subset G_2$, а конечная точка $z_0 \in G_1$, то

$$r(G_1, z_0) \leqslant r(G_2, z_0), \tag{2}$$

т. е. при расширении области внутренний радиус ее относительно фиксированной точки не убывает.

Неравенство (2) есть следствие свойства неубывания функции Грина с выбранным полюсом при расширении области (см., например, [2]) и равенства (1).

2) Внутренний радиус $r(G, z)$ есть непрерывная функция от z.

Действительно, пусть z' — произвольная конечная точка области G. Обозначим расстояние от z' до границы Γ области G через d'. Пусть круг $|z - z'| \leqslant \delta$ целиком лежит в области G, а точка z'' принадлежит этому кругу. Функции $h_1(z) = g_G(z, z') + \log|z - z'|$ и $h_2(z) = g_G(z, z'') + \log|z - z''|$ являются гармоническими в области G, причем, очевидно, $h_2(z'') = \log r(G, z'')$, а $h_1(z') = \log r(G, z')$. Так как гармоническая в G функция $h(z) = h_2(z) - h_1(z)$ на границе области G принимает значения $h(\zeta) = \log|\zeta - z''| - \log|\zeta - z'| \leqslant \leqslant \log\left(1 + \frac{|z'' - z'|}{|\zeta - z'|}\right) < \frac{\delta}{d'}$, то $h(z) < \frac{\delta}{d'}$, $z \in G$.

С другой стороны, обозначая через d'' расстояние от точки z'' до границы Γ области G, аналогично предыдущему, найдем: $-h(z) < \frac{\delta}{d''}$, т. е. $h(z) > -\frac{\delta}{d''}$, $z \in G$. Таким образом, $|h(z)| < \frac{\delta}{d}$, $z \in G$, где $d = \min(d', d'')$. Следовательно, $|h(z'') - h(z')| = |\log r(G, z'') - \log r(G, z')| < \frac{2\delta}{d}$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь G — произвольная область плоскости z, содержащая конечную точку $z = z_0$.

Как обычно, последовательность $\{G_n\}$ конечно-связных областей G_n, $z_0 \in G_n$, ограниченных замкнутыми жордановыми кривыми, назовем аппроксимирующей, если выполнены следующие условия:

$$\bar{G}_n \subset G_{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} G_n = G.$$

Пусть $\{G_n\}$ — какая-нибудь аппроксимирующая последовательность областей для G.

Тогда $g_{G_n}(z, z_0) = -\log|z - z_0| + u_n(z)$, где $u_n(z)$ — гармоническая в окрестности точки z_0 функция. Обозначая $u_n(z_0)$ через γ_n, получим

$$g_{G_n}(z, z_0) = -\log|z - z_0| + \gamma_n + 0(1),$$

где $0(1) \to 0$ вместе с $|z - z_0|$.

Так как $\gamma_{n+1} - \gamma_n = \lim\limits_{z \to z_0}[g_{G_{n+1}}(z, z_0) - g_{G_n}(z, z_0)] > 0$, то последовательность $\{\gamma_n\}$ возрастающая, а следовательно, существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{n \to \infty} \gamma_n = \gamma$.

Если функция Грина ([2], стр. 104) $g_G(z, z_0)$ существует, то γ — конечная величина и

$$g_G(z, z_0) = -\log|z - z_0| + \gamma + 0(1), \tag{3}$$

причем, в силу независимости функции Грина от выбора аппроксимирующей последовательности $\{G_n\}$, γ также не будет зависеть от этого выбора.

Если же функция Грина области G не существует, то $\gamma = \infty$. Допустим теперь, что область G имеет функцию Грина $g_G(z, z_0)$. Распространим принятое выше определение внутреннего радиуса (определение 1) на случай произвольной области, обладающей функцией Грина. Нетрудно заметить, что если $\{G_n\}$ — какая-нибудь аппроксимирующая последовательность областей, а γ_n имеет указанный выше смысл, то $r(G, z_0) = \exp \lim\limits_{n\to\infty} \gamma_n$, т. е.

$$r(G, z_0) = \lim_{n\to\infty} r(G_n, z_0). \tag{4}$$

Равенство (4) можно было бы принять в качестве определения внутреннего радиуса произвольной области G. Нетрудно заметить, что если $r(G, z_0) = +\infty$, то область G не имеет функции Грина и наоборот. Независимость $r(G, z_0)$ от выбора аппроксимирующей последовательности $\{G_n\}$ следует из указанной выше независимости γ от выбора $\{G_n\}$.

Иногда внутренний радиус $r(G, z_0)$ для произвольной области G определяют с помощью равенства

$$r(G, z_0) = \sup r(G', z_0), \tag{5}$$

где верхняя грань берется по всем областям $G' \subset G$, обладающим классической функцией Грина (см., например, [3], стр. 99). Докажем эквивалентность определения внутреннего радиуса области с помощью равенства (5) ранее данному. Для этого достаточно, очевидно, показать эквивалентность определений с помощью равенств (4) и (5).

Итак, пусть G — произвольная область плоскости z, z_0 — конечная точка G, а $\{G_n\}$ — аппроксимирующая последовательность областей G_n, $z_0 \in G_n$. Введем обозначения:

$$r(G, z_0)_{(4)} = \lim_{n\to\infty} r(G_n, z_0), \qquad r(G, z_0)_{(5)} = \sup_{G' \in \{G'\}} r(G', z_0),$$

где $\{G'\}$ — совокупность областей $G' \subset G$, обладающих классической функцией Грина. Нетрудно заметить, что если одно из чисел $r(G, z_0)_{(4)}$, $r(G, z_0)_{(5)}$ бесконечно, то и второе также бесконечно. Поэтому достаточно ограничиться случаем, когда оба эти числа конечны.

Так как $G_n \in \{G'\}$, то

$$r(G, z_0)_{(4)} \leqslant r(G, z_0)_{(5)}. \tag{6}$$

Для доказательства утверждаемой эквивалентности определений внутреннего радиуса достаточно доказать неравенство, противоположное (6). Пусть ε — произвольное положительное число, а область $G_1 \in \{G'\}$ такая, что

$$\log r(G, z_0)_{(5)} - \log r(G_1, z_0) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

Рассмотрим множество $\gamma_\varepsilon = \left\{ z : g_{G_1}(z, z_0) = \frac{\varepsilon}{2} \right\}$. Обозначим через G_ε ту из областей, ограниченных γ_ε, которая содержит точку $z = z_0$. Ясно, что $\overline{G_\varepsilon} \subset G_1$, а следовательно, $\overline{G_\varepsilon} \subset G$.

Если теперь задана какая-нибудь аппроксимирующая последовательность областей $\{G_n\}$, то всегда можно найти число $n(\varepsilon)$ такое, что если $n \geqslant n(\varepsilon)$, то $G_n \supset \overline{G_\varepsilon}$.

Учитывая свойство неубывания внутреннего радиуса области относительно заданной точки при ее расширении, получаем:

$$\lim_{z\to z_0} [g_{G_n}(z, z_0) + \log|z - z_0|] \geqslant \lim_{z\to z_0} [g_{G_\varepsilon}(z, z_0) + \log|z - z_0|] =$$
$$= \lim_{z\to z_0} \left[g_{G_1}(z, z_0) + \log|z - z_0| - \frac{\varepsilon}{2} \right],$$

т. е.

$$\log r(G_n, z_0) \geqslant \log r(G_1, z_0) - \frac{\varepsilon}{2} > \log r(G, z_0)_{(5)} - \varepsilon.$$

В силу произвольности ε, получим при $n \to \infty$

$$\log r(G, z_0)_{(4)} = \lim_{n\to\infty} \log r(G_n, z_0) \geqslant \log r(G, z_0)_{(5)},$$

т. е.

$$r(G, z_0)_{(4)} \geqslant r(G, z_0)_{(5)}. \tag{8}$$

Из (6) и (8) следует $r(G, z_0)_{(4)} = r(G, z_0)_{(5)}$, что и требовалось доказать.

Если G — конечносвязная область, ограниченная n аналитическими кривыми Жордана, то можно установить связь между внутренним радиусом области G относительно конечной точки $z = z_0$, функцией Альфорса [4] $w = F_G(z, z_0)$, отображающей область G на полный n-листный круг и решающей экстремальную задачу о нахождении $\sup f'(z_0)$ в классе регулярных в области G функций, удовлетворяющих условиям

$$f(z_0) = 0;\ f'(z_0) > 0;\ |f(z)| < 1,\ z \in G,$$

и нулями функции Альфорса.

Действительно, известно (см., например, [5], стр. 524), что

$$|F_G(z, z_0)| = \exp\left[-g_G(z, z_0) - \sum_{k=1}^{n-1} g_G(z, z_k)\right],$$

где $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ — нули функции $F_G(z, z_0)$, отличные от $z = z_0$, причем каждый из них берется столько раз, какова его кратность.

Следовательно, $-\log|F_G(z, z_0)| = g_G(z, z_0) + \sum\limits_{k=1}^{n-1} g_G(z, z_k)$, т. е.

$$-\log\left|\frac{F_G(z, z_0)}{z - z_0}\right| = g_G(z, z_0) + \log|z - z_0| + \sum_{k=1}^{n-1} g_G(z, z_k).$$

Переходя к пределу при $z \to z_0$, получим

$$-\log F'_G(z, z_0) = \log r(G, z_0) + \sum_{k=1}^{n-1} g_G(z_0, z_k),$$

т. е.

$$r(G, z_0) = \frac{1}{F'_G(z_0, z_0)} \exp - \sum_{k=1}^{n-1} g_G(z_0, z_k). \tag{9}$$

Равенство (9) было впервые установлено в заметке [6].

Если G — односвязная область, то равенство (9) соответствует хорошо известному определению внутреннего (конформного) радиуса, так как в этом случае корни z_k, $k = 1, 2, \ldots, n-1$ отсутствуют, а функция $w = F_G(z, z_0)$, $F_G(z_0, z_0) = 0$, однолистно отображает область G на единичный круг с центром в начале координат.

2. Изменение внутреннего радиуса области при отображении ее с помощью регулярных функций. Пусть область G имеет ограниченный внутренний радиус относительно конечной точки $z = z_0$. Обозначим через $\mathfrak{R}^{(p)}(G)$ класс регулярных в области G функций $w = f(z)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$f(z_0) = w_0;\ f'(z_0) = f''(z_0) = \ldots = f^{(p-1)}(z_0) = 0;\ f^{(p)}(z_0) = p!\, a_p \neq 0$$

Множество значений, принимаемых функцией $w = f(z)$ в области G и рассматриваемых в плоскости w, будем обозначать через G_f. Что можно сказать о внутреннем радиусе $r(G_f, w_0)$? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1. *Если функция* $w = f(z) \in \mathfrak{R}^{(p)}(G)$, *а* $z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$ — *корни уравнения* $f(z) - w_0 = 0$, *отличные от* $z = z_0$, *имеющие соответственно кратности* $p_1, p_2, \ldots p_k, \ldots$, *то*

$$r(G_f, w) \geqslant |a_p| r^p(G, z_0) \exp \sum_{k \geqslant 1} p_k g_G(z_0, z_k). \tag{10}$$

При доказательстве теоремы достаточно ограничиться случаем конечного $r(G_f, w_0)$.

Согласно принципу Линделефа в обобщенной форме, принадлежащей М. Хейнсу [7] (см. также [2], стр. 91 и п. 27, стр. 108), имеем

$$g_{G_f}(w, w_0) \geqslant p g_G(z, z_0) + \sum_{k \geqslant 1} p_k g_G(z, z_k),$$

т. е. $\log r(G_f, w_0) - \log|w - w_0| + 0(1) \geqslant p \log r(G, z_0) - p \log|z - z_0| + 0(1) + \sum_{k \geqslant 1} p_k g_G(z, z_k)$,

Прибавив к левой и правой частям последнего неравенства $\log|z - z_0|^p$, получим

$$\log\left|\frac{|z - z_0|^p r(G_f, w_0)}{a_p(z - z_0)^p + a_{p+1}(z - z_0)^{p+1} + \ldots}\right| \geqslant p \log r(G, z_0) + \sum_{k \geqslant 1} p_k g_G(z, z_k) + 0(1).$$

Переходя к пределу при z, стремящемся к z_0, получим $\log \frac{r(G_f, w_0)}{|a_p|} \geqslant pr(G, z_0) + \sum_{k \geqslant 1} p_k g_G(z_0, z_k)$, т. е. (10), что и требовалось доказать.

Замечание. Если область G — конечносвязная, ограниченная кривыми Жордана, то неравенство (10) получается [6] при помощи использования только классической функции Грина.

Следствие 1. Если область G совпадает с единичным кругом $|z| < 1$, а $w = f(z) = w_0 + a_p z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \ldots$, то неравенство (10) принимает вид

$$r(G_f, w_0) \geqslant \frac{|a_p|}{\prod_{k \geqslant 1} |z_k|^{p_k}}.$$

Полученное неравенство является уточнением результатов У. К. Хеймана [3, 8] (при $p = 1$) и Абе и Кобори [9] (при $p > 1$), где не учитывались корни уравнения $f(z) - w_0 = 0$, отличные от $z = z_0$.

Следствие 2. Если область G является кругом $|z| < R$, $f(z) = w_0 + a_p z^p + \ldots$, а $r(G_f, w_0) = M$, то неравенство (10) примет вид

$$M \geqslant (R)^p \prod_{k \geqslant 1} \left(\frac{R}{|z_k|}\right)^{p_k} |a_p|, \text{ т. е. } |a_p| \leqslant \frac{M}{R^p} \prod_{k \geqslant 1} \left(\frac{|z_k|}{R}\right)^{p_k}.$$

Полученное неравенство является обобщением одной части леммы Шварца. Заметим, что с помощью принципа Линделефа в форме Хейнса легко получить обобщение второй части леммы Шварца. Впрочем впервые, по-видимому, подобное обобщение было получено О. Лехто [10].

Теорема 2. *Если G — конечносвязная область, ограниченная кривыми Жордана, функция* $w = f(z) \in \mathfrak{R}^{(p)}(G)$, *а общее число корней уравнения* $f(z) - w_0 = 0$ *с учетом их кратностей равно* n, *то равенство в* (10) *может иметь место только в случае, когда каждая точка* $w \in G_f$ *является образом точно* n *точек области* G *(здесь снова учитывается кратность точек).*

Для доказательства теоремы нам понадобится следующий специальный случай леммы Хейнса (см. [8], стр. 160—161).

Лемма. *Если значения регулярной в области G функции $w = f(z)$ стремятся к границе области G_f всякий раз, когда z любым образом стремится к границе G, а общее число корней уравнения $f(z) - w_0 = 0$ с учетом их кратностей равно n, то функция $w = f(z)$ принимает каждое значение из G_f точно n раз.*

Действительно, пусть w' — произвольная точка области G_f. Обозначим через γ систему спрямляемых кривых Жордана, ограничивающих подобласть из G, содержащую все нули уравнений $f(z) - w_0 = 0$ и $f(z) - w' = 0$. Такой выбор γ всегда возможен, так как по условию леммы значения функции $f(z)$ стремятся к границе области G_f, когда z стремится к границе G. Обозначим число корней уравнения $f(z) - w' = 0$ в области G через $n(w')$. Ясно, что $n(w') = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w'} dz$. Так как функция $n(w')$ непрерывна в области, ограниченной образом кривых γ при отображении $w = f(z)$, и принимает в этой области только целые значения ($n(w') \neq +\infty$, так как $f(z) \not\equiv w'$), то $n(w') = n(w_0) = n$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2. Введем в рассмотрение функцию

$$u(z) = g_{G_f}(w, w_0) - p g_G(z, z_0) - \sum_{k \geq 1} p_k g_G(z, z_k), \tag{11}$$

где суммирование распространяется на все нули уравнения $f(z) - w_0 = 0$, отличные от $z = z_0$. Функция $u(z)$ является гармонической в области G.

Из (11) нетрудно получить следующее равенство;

$$u(z) = \log r(G_f, w_0) - p \log r(G, z_0) - \sum_{k \geq 1} p_k g_G(z, z_k) - p \log |a_1| - 0(1). \tag{12}$$

При помощи соотношения (12), учитывая, что функция $u(z)$ — гармоническая в G, приходим к выводу, что равенство в (10) может иметь место только в случае, если $\lim\limits_{z \to z_0} u(z) = 0$, т. е. когда $u(z) \equiv 0$ в G. В этом случае, опираясь на (11), нетрудно показать, что функция Грина $g_{G_f}(w, w_0)$ стремится к нулю, если z стремится к границе области G (здесь учитываем, что граница области G состоит из конечного числа кривых Жордана, а $g_G(z, z_k)$ — классическая функция Грина). Это означает, что $f(z)$ стремится к границе области G_f, когда z стремится к границе G. Применяя теперь доказанную выше лемму Хейнса, мы и приходим к полному доказательству теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Szegö, On the capacity of a condenser, Bull. Amer. Math. Soc., **51**, 1945, 325—350.
2. С. Стоилов, Теория функций комплексного переменного, т. 2, ИЛ, М., 1962.
3. В. К. Хейман, Многолистные функции, ИЛ, М., 1960.
4. L. Ahlfors, Bounded analytic functions, Duke Math., **14** 1947, 1—11.
5. Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, Гостехиздат, М., 1952.
6. И. П. Митюк, Принцип симметризации для многосвязных областей, ДАН СССР, **157**, № 2, 1964.
7. M. Heins, On the Lindelöf principle, Ann. Math., **61**, 1955, 440—473.
8. W. K. Hayman, Some applications of the transfinite diameter to the theory of functions, Anal. Math., **1**, 1951, 155—179.
9. A. Kobori et H. Abe, Une remarque sur un théorème de M. Hayman, Jap. Math., 29, 1959, 32—34.
10. O. Lehto, A majorant principle in the theory of functions, Math. Scand., **1**, 1953, 5—17.

Поступила 19.V 1964 г.

Киев