Некоторые задачи неустановившегося инерционного движения идеальной жидкости

К. А. Бреус

Рассмотрение задач нестационарного инерционного движения идеальной жидкости представляет большой принципиальный и практический интерес. Особое место занимают задачи неустановившегося движения по инерции под действием мощного импульса (взрыва) и исследование кумулятивного эффекта, возникающего при этом в некоторых случаях. Гидродинамическая картина, получающаяся при взрыве, содержит в себе наиболее существенные и практические важные черты движения с громадными скоростями и давлениями, имеющими место в течение очень короткого промежутка времени. Инерционные силы, возникающие при этом, играют главную роль по сравнению с вязкими силами, которыми можно пренебречь.

В настоящей работе решаются задачи об обжатии полого цилиндра и полой сферы под воздействием внезапно приложенного импульсного давления, направленного перпендикулярно к внешней поверхности этих тел, в предложении, что материя их оболочек представляет собой идеальную несжимаемую жидкость. Физические предпосылки для принятой схемы идеальной жидкости приведены в работе [1].

1. Задача об обжатии бесконечного цилиндра. Рассмотрим бесконечный полый цилиндр, пусть радиус внешней поверхности цилиндра будет R, а радиус внутренней поверхности $\bar{r}$. Обозначим через z ось симметрии цилиндра, а через r — расстояние от оси до произвольной точки оболочки цилиндра. Пусть под действием внешнего импульса, направленного перпендикулярно к внешней поверхности цилиндра, все элементы оболочки жидкого цилиндра приобрели скорость, перпендикулярную оси цилиндра. Требуется определить время движения частиц жидкости, их скорость и давление внутри жидкости.

Так как движение по инерции идеальной несжимаемой жидкости оболочки цилиндра под действием внешнего импульса, начинающееся из состояния покоя, является потенциальным, принимаем распределение потенциала скоростей в начальный момент $t = 0$ в виде

$$\varphi(r) = V_0 R_0 \lg \frac{\bar{r}_0}{r}, \tag{1}$$

где V_0— скорость, а R_0 и $\bar{r}_0$ — соответственно радиусы внешней и внутренней поверхности в начальный момент $t = 0$. Распределение скоростей частиц жидкого цилиндра в начальный момент:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_0 = \frac{V_0 R_0}{r}, \tag{2}$$

очевидно, при $r = R_0$, $v_0 = V_0$.

Для составления необходимых уравнений, характеризующих движение частиц жидкого цилиндра, воспользуемся прежде всего условием непрерывности (несжимаемости) жидкости, которое запишем в следующем виде

$$vr = VR = \bar{v}\,\bar{r} = a(t). \tag{3}$$

Кроме того, имеем

$$R^2 - \bar{r}^2 = R_0^2 - \bar{r}_0^2 = R_1^2. \tag{4}$$

Из равенства (3) имеем

$$v = \frac{a}{r} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \tag{5}$$

т. е.

$$\varphi(r, t) = -(a \lg r + b), \tag{6}$$

в котором a и b зависят только от t.

Уравнением движения жидкого цилиндра будет

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{7}$$

или, подставляя вместо v его значение из (5), имеем

$$\frac{\dot{a}}{r} - \frac{a^2}{r^3} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{8}$$

где $\dot{a}$ обозначает дифференцирование $a(t)$ по t. Отсюда, интегрируя по r, получаем для определения давления внутри жидкого цилиндра следующее выражение:

$$\frac{p}{\varrho} = -\dot{a}\lg r - \frac{a^2}{2r^2} \quad (R < r < \bar{r}) \tag{9}$$

с точностью до аддитивной величины, зависящей только от t. Так как рассматриваемое движение жидкости инерционное, то кинетическая энергия движения не зависит от времени и есть величина постоянная. Имеем

$$T = \frac{\varrho}{2}\int_{\bar{r}}^{R}\int_{0}^{2\pi} v^2 r\,dr\,d\psi = \pi\varrho\int_{\bar{r}}^{R} V^2R^2\frac{dr}{r} = \pi\varrho V^2R^2\cdot\lg\frac{R}{\bar{r}} \tag{10}$$

или

$$T = \pi\varrho a^2 \lg\frac{R}{\bar{r}}. \tag{10'}$$

Из равенств (3) и (10) получим

$$v = \frac{VR}{r} = \sqrt{\frac{T}{\pi\varrho}}\,\frac{1}{r\sqrt{\lg\frac{R}{\bar{r}}}}. \tag{11}$$

Так как при $\bar{r} \to 0$ $R \to R_1$, то при $r \neq 0$ из равенства (11) вытекает, что $v \to 0$; если же $r = \bar{r} \to 0$, то $v \to \infty$, следовательно, вся кинетическая энергия движения жидкости концентрируется около оси цилиндра.

Для определения времени движения воспользуемся равенством (10), а также соотношением

$$V = \frac{dR}{dt}.$$

Тогда получим

$$T_1 = R^2 \lg \frac{R}{\overline{r}}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2,$$

где

$$T_1 = \frac{T}{\pi\varrho};$$

отсюда

$$t = \frac{1}{\sqrt{T_1}}\int\limits_{R_0}^{R} R\sqrt{\lg\frac{R}{\overline{r}}}\, dR. \tag{12}$$

Для нахождения последнего интеграла введем переменную ω по формулам

$$R = R_1 \operatorname{ch}\omega, \quad \overline{r} = R_1 \operatorname{sh}\omega, \tag{13}$$

причем $R_0^2 - \overline{r}_0^2 = R_1^2$, где R_1 — радиус внешней поверхности цилиндра в конце времени движения. Имеем

$$T_1 = a^2 \lg \operatorname{cth}\omega; \qquad \operatorname{ctgh}\omega = \frac{\operatorname{ch}\omega}{\operatorname{sh}\omega}. \tag{14}$$

Так как

$$V = \frac{dR}{dt} = R_1 \operatorname{sh}\omega \frac{d\omega}{dt},$$

то

$$T_1 = R_1^4 \operatorname{sh}^2\omega \operatorname{ch}^2\omega \lg \operatorname{cth}\omega \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2;$$

отсюда

$$t = \frac{R_1^2}{\sqrt{T_1}}\int\limits_{\omega_0}^{0} \operatorname{sh}\omega \operatorname{ch}\omega \sqrt{\lg \operatorname{cth}\omega}\, d\omega. \tag{15}$$

Нижний предел интегрирования в последнем интеграле определяется, например, из условия

$$\operatorname{ch}\omega_0 = \frac{R_0}{R_1}.$$

Давление в любой точке жидкого цилиндра с точностью до слагаемого, зависящего только от времени, определяется по формуле

$$\frac{p}{\varrho} = -\dot{a}\lg r - \frac{a^2}{2r^2}.$$

Обозначая через P давление на внешней поверхности цилиндра, а через $\overline{p}$ — давление на его внутренней поверхности, можно показать, что в каждый момент времени t $P = \overline{p}$.

Действительно, из последнего равенства имеем

$$\frac{P}{\varrho} = -\dot{a}\lg R - \frac{a^2}{2R^2}, \tag{16}$$

$$\frac{\overline{p}}{\varrho} = \dot{a}\lg \overline{r} - \frac{a^2}{2\overline{r}^2}. \tag{17}$$

Вычитая равенство (17) из (16), получаем

$$\frac{P-\overline{p}}{\varrho} = -\dot{a}\lg\frac{R}{\overline{r}} + \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\overline{r}^2} - \frac{1}{R^2}\right) = -\dot{a}\lg\frac{R}{\overline{r}} + \frac{a^2}{2}\frac{R_1^2}{R^2\overline{r}^2}. \tag{18}$$

На основании равенства (3), имеем:

$$a = RR', \ \dot{a} = R'^2 + RR'',$$

и равенство (18) принимает вид

$$\frac{P - \bar{p}}{\varrho} = -(R'^2 + RR'')\lg\frac{R}{\bar{r}} + \frac{R_1^2 R'^2}{2\bar{r}^2} =$$

$$= -\left(V^2 + RV\frac{dV}{dR}\right)\lg\frac{R}{\bar{r}} + \frac{R_1^2 V^2}{2\bar{r}^2}. \tag{19}$$

Воспользовавшись соотношением

$$V = \sqrt{T_1}\frac{1}{R\sqrt{\lg\frac{R}{\bar{r}}}}$$

и взяв логарифмическую производную от него, получим

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dR}{R} + \frac{1}{2}\frac{R_1^2}{R\bar{r}^2\lg\frac{R}{\bar{r}}}.$$

Преобразуя последнее равенство и перенеся все его члены в левую часть, имеем

$$\left(V^2 + RV\frac{dV}{dR}\right)\lg\frac{R}{\bar{r}} - \frac{R_1^2 V^2}{2\bar{r}^2} = 0.$$

Из сравнения полученного равенства с равенством (19) следует, что

$$\frac{P - \bar{p}}{\varrho} = 0, \quad P = \bar{p},$$

т. е. давление на обеих поверхностях жидкого цилиндра в каждый момент времени одинаково.

Чтобы вычислить давление внутри жидкого цилиндра, рассмотрим разность давлений в некоторой внутренней точке цилиндра и на его внешней поверхности, избегая тем самым неопределенность в формуле (9); имеем:

$$\frac{p - P}{\varrho} = \dot{a}\lg\frac{R}{r} + \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2}\right). \tag{20}$$

Не уменьшая общности, можно положить давление на внешней поверхности цилиндра $P = 0$; тогда получим

$$\frac{p}{\varrho} = \dot{a}\lg\frac{R}{r} + \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2}\right), \tag{21}$$

где

$$a = \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{\lg \operatorname{cth}\omega}}, \quad \dot{a} = \frac{T_1}{2R_1^2 \operatorname{sh}^2\omega \operatorname{ch}^2\omega (\lg \operatorname{cth}\omega)^2}.$$

Легко убедиться, что в каждый момент движения давление внутри жидкого цилиндра имеет максимум при $r = \frac{a}{\sqrt{\dot{a}}}$. Для вычисления максимального давления в каждый момент движения имеем следующее выражение:

$$\frac{p}{\varrho} = -\dot{a}\left(\lg R - \lg\frac{a}{\sqrt{\dot{a}}} - \frac{1}{2}\right) + \frac{a^2}{2R^2}.$$

Задача об обжатии полой сферы. Рассмотрим полую сферу, радиус внешней поверхности которой R, а радиус внутренней поверхности $\bar{r}$; расстояние произвольной точки оболочки полой сферы от ее центра обозначим через r. Пусть под действием внешнего импульса все элементы оболочки полой сферы приобретают скорость, направленную по радиусу сферы к ее центру.

Записав условие неразрывности движения в виде

$$vr^2 = VR^2 = a(t), \tag{22}$$

для определения скорости любой точки оболочки полой сферы будем иметь

$$v = V\frac{R^2}{r^2}.$$

Следовательно, рассматриваемое движение обладает потенциалом скоростей

$$\varphi = \frac{a}{r} + b,$$

в котором a и b зависят только от t.

Из последнего равенства имеем

$$v = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{a}{r^2}. \tag{23}$$

Уравнение движения жидкой оболочки полой сферы имеет вид

$$\frac{\dot{a}}{r^2} - \frac{2a^2}{r^5} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{24}$$

интегрируя которое по r, получим

$$\frac{p}{\varrho} = \frac{\dot{a}}{r} - \frac{a^2}{2r^4} \tag{25}$$

с точностью до слагаемого, зависящего только от t.

Для определения кинетической энергии движения имеем:

$$T = \frac{\varrho}{2}\int\limits_{\bar{r}}^{R}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} v^2r^2\sin\nu\,d\nu\,dr\,d\psi = 2\pi\varrho\int\limits_{\bar{r}}^{R} v^2r^2dr.$$

Замечая, что

$$v^2 = \frac{a^2}{r^4},$$

получаем

$$T = 2\pi\varrho\int\limits_{\bar{r}}^{R}\frac{a^2}{r^2}\,dr = 2\pi\varrho a^2\left(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{R}\right) \tag{26}$$

или

$$T = 2\pi\varrho V^2R^4\left(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{R}\right). \tag{27}$$

Для определения скорости любой точки жидкой полой сферы будем иметь

$$v = V\frac{R^2}{r^2} = \frac{\sqrt{T_1}}{r^2\sqrt{\frac{1}{\bar{r}} - \frac{1}{R}}}, \tag{28}$$

где $T_1 = \frac{T}{2\pi\varrho}$.

Из последнего равенства замечаем, что при $r \neq \bar{r}$ и $r \to 0$ скорость любой точки жидкой полой сферы стремится к нулю; при $r = \bar{r} \to 0$ скорость любой точки внутренней поверхности жидкой оболочки при приближении ее к центру стремится к бесконечности. Таким образом, вся кинетическая энергия движения жидкой полой сферы концентрируется в центре сферы.

Чтобы определить время движения жидкой полой сферы, введем переменную ω по формулам

$$R^3 = R_1^3 \operatorname{ch}^2\omega, \quad \bar{r}^3 = R_1^3 \operatorname{sh}^2\omega, \tag{29}$$

где R_1 определяется из соотношения $R_0^3 - \bar{r}_0^3 = R_1^3$, а переменная ω изменяется в пределах от ω_0 до 0, причем

$$\operatorname{ch}^2\omega_0 = \frac{R_0^3}{R_1^3},$$

где R_0 и $\bar{r}_0$ — радиусы внешней и внутренней оболочек полой сферы в начальный момент $t = 0$.

Тогда

$$T_1 = \frac{a^2}{R_1}\frac{\operatorname{ch}^{\frac{2}{3}}\omega - \operatorname{sh}^{\frac{2}{3}}\omega}{(\operatorname{sh}\omega\operatorname{ch}\omega)^{\frac{2}{3}}} = \frac{4}{9}R_1^5 \operatorname{sh}^2\omega\operatorname{ch}^2\omega\frac{\operatorname{ch}^{\frac{2}{3}}\omega - \operatorname{sh}^{\frac{2}{3}}\omega}{(\operatorname{sh}\omega\operatorname{ch}\omega)^{\frac{2}{3}}},$$

и, следовательно,

$$t = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{R_1^5}}{\sqrt{T_1}}\int\limits_{\omega_0}^{0}(\operatorname{sh}\omega\operatorname{ch}\omega)^{\frac{2}{3}}\sqrt{\operatorname{ch}^{\frac{2}{3}}\omega - \operatorname{sh}^{\frac{2}{3}}\omega}\, d\omega. \tag{30}$$

Давление в любой точке жидкой полой сферы с точностью до аддитивной постоянной, зависящей только от времени, определяем по формуле (25).

Так же, как и в случае жидкого цилиндра, легко убеждаемся, что давления на внешней и внутренней поверхностях жидкой полой сферы в любой момент времени ее движения равны между собой. Для вычисления давления в произвольной точке рассмотрим разность давлений в некоторой внутренней точке и на ее внешней поверхности, чтобы избегнуть неопределенности в формуле (25), причем полагаем давление на внешней поверхности равным нулю; имеем

$$\frac{p}{\varrho} = \dot{a}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) - \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{R^4}\right), \tag{31}$$

причем

$$a^2 = \frac{T_1 R_1 (\operatorname{sh}\omega\operatorname{ch}\omega)^{\frac{2}{3}}}{\operatorname{ch}^{\frac{2}{3}}\omega - \operatorname{sh}^{\frac{2}{3}}\omega}, \quad \dot{a} = \frac{T_1}{2R_1^2}\frac{\operatorname{cth}^{\frac{4}{3}}\omega - \operatorname{th}^{\frac{4}{3}}\omega}{(\operatorname{ch}^{\frac{2}{3}}\omega - \operatorname{sh}^{\frac{2}{3}}\omega)^2}.$$

Легко показать, что давление внутри жидкой полой сферы в каждый момент ее инерционного движения имеет максимум, а своего максимального значения оно достигает при

$$r = \sqrt[3]{\frac{2a^2}{\dot{a}}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Лаврентьев, Кумулятивный заряд и принципы его работы, УМН, т. XII, вып. 4 (76), 1957.

Поступила 5.III 1962 г.
Киев