Об индексе интегрального оператора, соответствующего второй основной задаче плоской теории упругости

Е. Н. Парасюк

Как указано в [1], применение общего «потенциального» метода к решению общих регуляризуемых граничных задач для линейных эллиптических систем дифференциальных уравнений в частных производных приводит к решению систем интегральных уравнений, которые могут быть представлены в виде (в матричной записи для 2-х измерений)

$$u(x) - \int\limits_S \frac{1}{|x-y|} G\left(x, y, \nu(x), \nu(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right) u(y)\, d_y S = f(x), \tag{1}$$

где введены следующие обозначения: $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$, $\nu(x)$ — единичный вектор внутренней нормали к границе S в точке x, $|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}$, $u(x)$ — неизвестный функциональный столбец высоты p, $f(x)$ — заданный функциональный столбец той же высоты p, непрерывный при $x \in S$, $G\left(x, y, \nu(x), \nu(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right)$ — функциональная $p \times p$ матрица, определенная при $x, y \in S$, непрерывная и удовлетворяющая условию

$$G\left(x, y, \nu(x), \nu(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right) = O\left(\left|\left(\nu(x), \frac{x-y}{|x-y|}\right)\right| + \left|\left(\nu(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right)\right|\right). \tag{2}$$

Если выделить отдельно оператор G:

$$Gu(x) = \int\limits_S \frac{1}{|x-y|} G\left(x, y, \nu(x), \nu(y), \frac{x-y}{|x-y|}\right) u(y)\, d_y S,$$

то уравнение (1) представится в виде

$$(I-G)\,u(x) = f(x),$$

где I — единичный оператор. В случае, когда кривая S удовлетворяет условиям Ляпунова, оператор G оказывается вполне непрерывным, а уравнение (1) — регулярным. Наша цель — рассмотреть тот случай, когда кривая S принадлежит классу кривых с ограниченным вращением и без точек заострения [2], т. е. допускает наличие бесчисленного множества угловых точек. В этом случае оператор G будем называть сингулярным.

Предполагается, что оператор G действует в банаховом пространстве $L_\varepsilon(S)$ с нормой

$$\| u(x) \| = \int\limits_S \int\limits_S \frac{| d\theta(z) |}{| z - x |^\varepsilon} | u(x) | \, d_x S.$$

Здесь $| u(x) | = \sum\limits_{k=1}^{p} | u_k(x) |$, $\theta(z)$ —угловая функция [2]. Заметим, что $\theta(z)$— функция с ограниченной вариацией, так что интеграл Лебега — Стилтьеса существует.

В случае, когда граница S имеет конечное количество угловых точек, отличных от точек заострения, Я. Б. Лопатинский в [3], опираясь на результаты И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [4], исследовал сингулярность оператора G и получил формулу для подсчета индекса оператора $I—G$. Этот результат без существенных изменений переносится на случай общих кривых Радона, т. е. на случай жордановых кривых с ограниченным вращением и без точек заострения. В результате удается установить, что при сделанных предположениях индекс $\varkappa$ оператора $I—G$ конечен и вычисляется по формуле

$$\varkappa = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{-\infty + i\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)}^{+\infty + i\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)} d_\lambda \arg \Delta_k(\lambda), \tag{3}$$

где обозначено:

$$\Delta_k(\lambda) = \det \{E - H_k^{(1,2)}(\lambda) \cdot H_k^{(2,1)}(\lambda)\},$$

$$H_k^{(1,2)}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{\sqrt{e^t + e^{-t} - 2\cos\omega_k}} G(a_k, a_k, \nu_k, -\tau_k \sin\omega_k - \nu_k \cos\omega_k, \zeta_k(-t)) \, dt,$$

$$H_k^{(2,1)}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda t}}{\sqrt{e^t + e^{-t} - 2\cos\omega_k}} G(a_k, a_k, -\tau_k \sin\omega_k - \nu_k \cos\omega_k, \nu_k, -\zeta_k(t)) \, dt,$$

$$\zeta_k(t) = \frac{[e^{-\frac{t}{2}} \cos\omega_k - e^{\frac{t}{2}}) \tau_k - \nu_k e^{-\frac{t}{2}} \sin\omega_k}{\sqrt{e^t + e^{-t} - 2\cos\omega_k}},$$

τ_k, ν_k — единичные векторы соответственно левой касательной и внутренней нормали к S в точке a_k с внутренним углом ω_k, $\lambda = \xi + i\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)$, $0 < \varepsilon < 1$, E — единичная матрица. При этом имеет место оценка

$$\int\limits_{-\infty + i\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)}^{+\infty + i\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)} d_\lambda \arg \Delta_k(\lambda) = o,$$

если только в точке a_k выполняется условие

$$\sin^2\frac{\pi-\omega_k}{2}<\frac{\sqrt[p]{2}-1}{4\pi^2C^2p^{7/2}}\sin^2\varepsilon\pi, \tag{4}$$

где C — постоянная, входящая в условие (2). Отсюда следует, что сумма (3) всегда конечная.

В случае второй основной задачи плоской теории упругости имеем [5]:

$$G\left(x,\,y,\,\nu(x),\,\nu(y),\,\frac{x-y}{|x-y|}\right)=\frac{\gamma}{\pi}\left(\nu(y),\,\frac{x-y}{|x-y|}\right)\times$$

$$\times\left[(1-\varkappa)E+2\varkappa\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)\left(\frac{x-y}{|x-y|}\right)'\right],$$

где через γ обозначен параметр соответствующего интегрального уравнения, $\varkappa=\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}$, λ и μ — постоянные Лямэ, а через $(x-y)'$ обозначен транспонированный столбец $(x-y)=\begin{pmatrix}x_1-y_1\\x_2-y_2\end{pmatrix}$. После несложных вычислений непосредственно имеем:

$$H_k^{(1,2)}(\lambda)=\gamma\left\{\alpha E+\varkappa\left(\lambda+\frac{i}{2}\right)\sin\omega_k(\beta\cos\omega_k+i\alpha\sin\omega_k)(\nu_k\nu_k'-\tau_k\tau_k')+\right.$$

$$\left.+\varkappa\left(\lambda+\frac{i}{2}\right)\sin\omega_k(\beta\sin\omega_k-i\alpha\cos\omega_k)(\tau_k\nu_k'+\nu_k\tau_k')\right\},$$

$$H_k^{(2,1)}(\lambda)=\gamma\left\{\alpha E+\varkappa\left(\lambda+\frac{i}{2}\right)\sin\omega_k(\beta\cos\omega_k-i\alpha\sin\omega_k)(\nu_k\nu_k'-\tau_k\tau_k')+\right.$$

$$\left.+\varkappa\left(\lambda+\frac{i}{2}\right)\sin\omega_k(\beta\sin\omega_k+i\alpha\cos\omega_k)(\tau_k\nu_k'+\nu_k\tau_k')\right\},$$

$$\Delta_k(\lambda)=\left\{1-\gamma^2\left[\alpha^2+\varkappa^2\left(\lambda+\frac{i}{2}\right)^2(\alpha^2+\beta^2)\sin^2\omega_k\right]\right\}^2-$$

$$-4\gamma^4\alpha^2\beta^2\varkappa^2\left(\lambda+\frac{i}{2}\right)^2\sin^2\omega_k\left[1+\varkappa^2\left(\lambda+\frac{i}{2}\right)^2\sin^2\omega_k\right],$$

где

$$\alpha=\frac{\operatorname{sh}(\pi-\omega_k)\left(\lambda+\dfrac{i}{2}\right)}{\operatorname{sh}\pi\left(\lambda+\dfrac{i}{2}\right)},$$

$$\beta=\frac{\operatorname{ch}(\pi-\omega_k)\left(\lambda+\dfrac{i}{2}\right)}{\operatorname{sh}\pi\left(\lambda+\dfrac{i}{2}\right)}.$$

Если ввести обозначения

$$a(\lambda)=\alpha\left[1+\varkappa^2\left(\lambda+\frac{i}{2}\right)^2\sin^2\omega_k\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$b(\lambda)=\beta\varkappa\left(\lambda+\frac{i}{2}\right)\sin\omega_k,$$

то можно записать

$$\Delta_k(\lambda) = [1 - \gamma^2 (a(\lambda) + b(\lambda))^2] \cdot [1 - \gamma^2 (a(\lambda) - b(\lambda))^2].$$

Обозначая далее

$$z = \lambda + \frac{i}{2} = \xi + i(1 - \varepsilon) = \xi + i\sigma,$$

$$W_1(z) = a\left(z - \frac{i}{2}\right) + b\left(z - \frac{i}{2}\right),$$

$$W_2(z) = a\left(z - \frac{i}{2}\right) - b\left(z - \frac{i}{2}\right),$$

легко убеждаемся, что $W_1(z)$ и $W_2(z)$ — аналитические функции в полосе $0 < \sigma < 1$ и при σ малом, т. е. при ε близком к 1, величина $W_1(z)$ огибает отрезок $\left[0, \frac{(\pi - \omega_k + \varkappa \sin \omega_k)^2}{\pi^2}\right]$ в отрицательном направлении. Поскольку при малом σ $|W_1(z)| > |W_2(z)|$, то для того, чтобы

$$\int\limits_{-\infty + i\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)}^{+\infty + i\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)} d_\lambda \arg \Delta_k(\lambda) = 0,$$

достаточно, чтобы γ не принадлежало отрезкам $\left(-\infty, -\frac{\pi}{|\pi - \omega_k + \varkappa \sin \omega_k|}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{|\pi - \omega_k + \varkappa \sin \omega_k|}, +\infty\right)$. Отсюда следует, что радиус Фредгольма оператора соответствующего второй основной задаче плоской теории упругости, равен

$$\min_{0 < \omega_k < 2\pi} \frac{\pi}{|\pi - \omega_k + \varkappa \sin \omega_k|}.$$

Так как $|\pi - \omega_k + \varkappa \sin \omega_k| < \pi$ при $0 < \omega_k < 2\pi$, то радиус Фредгольма всегда больше единицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Лопатинский, Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям, УМЖ, т. V, № 2, 1953.

2. И. Радон, О краевых задачах для логарифмического потенциала, УМН, т. 1, вып. 3—4, 1946.

3. Я. Б. Лопатинський, Про один тип сингулярних інтегральних рівнянь, Теор. і прикл. матем., вип. II, Видав-во Львівськ. ун-ту, 1963.

4. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн, Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, т. XIII, вып. 2, 1958.

5. J. Fredholm, Arch. math., astr., fys., 2, № 28, 1906, 1—8.

Поступила 26.XI 1963 г.

Львов