Об основном интегральном представлении p-аналитических функций с характеристикой $p=x^k$

Г. Н. Положий

Пусть G — область в правой полуплоскости $z=x+iy$, G^* — область, ей симметричная относительно мнимой оси, $k=\text{const}>0$. В качестве обобщения основного интегрального представления x^k-аналитических функций [а) — в)], установленного в работах [г), д)], в данной работе доказывается ряд новых теорем

Теорема 1. *Если G в составе своей границы содержит отрезок L мнимой оси и $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ — функция, аналитическая в G такая, что $v|_L=0$, то функция*

$$\widetilde{f}(z)=\widetilde{u}(x,y)+i\widetilde{v}(x,y)=\frac{1}{2}\int_\Gamma f(z)\left[\left(\frac{z+\bar z}{2}\right)^{1-k}+\zeta-\frac{z-\bar z}{2}\right]\times$$

$$\times(z-\zeta)^{\frac{k}{2}-1}(\bar z+\zeta)^{\frac{k}{2}-1}d\zeta, \tag{1}$$

где Γ — контур в области $G+G^*$, оединяющий точку $-\bar z=-x+iy$ с точкой $z=x+iy$ (пересекая L), будет x^k-аналитической функцией в области G, а на L имеет непрерывные производные по x и y и $\widetilde{v}|_L=0$. Интегральное преобразование (1) устанавливает взаимно однозначное соответствие между x^k-аналитическими и аналитическими функциями в области G, мнимые части которых на L равны нулю.

Для доказательства теоремы запишем условия x^k-аналитичности в виде

$$\frac{d(\widetilde{u})}{dz}=\frac{2^k}{(z+\bar z)^k}\frac{d(i\widetilde{v})}{dz} \tag{2}$$

и отметим равенство

$$\frac{d}{dz}\left(\int_\Gamma F(\zeta,z,\bar z)\,d\zeta\right)=F(\zeta,z,\bar z)\Big|_{\zeta=z}+\int_\Gamma\frac{d(F(\zeta,z\ \bar z)}{dz}d\zeta. \tag{3}$$

Здесь $\dfrac{d(\,)}{dz}$ — символ обобщенной производной по $z=x+iy$ [е)], $F(\zeta,z,\bar z)=$ $=\sum\limits_{i,j,k=1}^{n}\varphi_i(\zeta)\psi_j(z)\bar\chi_k(z)$, $\varphi_i(z)$, $\psi_j(z)$, $\chi_k(z)$ — функции, аналитические в области $G+G^*$.

Равенство (1) эквивалентно следующим двум равенствам

$$\widetilde{u}(x,y)=\frac{1}{2}\int_\Gamma f(z)\left(\frac{z+\bar z}{2}\right)^{1-k}(z-\zeta)^{\frac{k}{2}-1}(\bar z-\zeta)^{\frac{k}{2}-1}d\zeta, \tag{4}$$

$$i\widetilde{v}(x,y)=\frac{1}{2}\int_\Gamma f(\zeta)\left[\zeta-\frac{z-\bar z}{2}\right](z-\zeta)^{\frac{k}{2}-1}(\bar z+\zeta)^{\frac{k}{2}-1}d\zeta. \tag{5}$$

В этом легко убедиться, если считать контур Γ симметричным относительно мнимой оси и учесть, что функция $(z-\xi)^{\frac{k}{2}-1}(\bar z+\zeta)^{\frac{k}{2}-1}$ в точках ζ и $-\bar\xi$ принимает сопряженные значения.

Обобщенные производные по z от $\widetilde{u}(x,y)$ и $i\widetilde{v}(x,y)$ при k, равном целому четному числу, вычисляются по формуле (3), при k, равном целому нечетному числу, — дифференцированием под знаком интегралов правых частей равенств

$$\widetilde{u}(x, y) = \frac{1}{1-e^{ik\pi}}\,\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma} f(\zeta)\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^{1-k}(z-\zeta)^{\frac{k}{2}-1}(\bar{z}+\zeta)^{\frac{k}{2}-1}d\zeta,$$

$$i\widetilde{v}(x, y) = \frac{1}{1-e^{ik\pi}}\,\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma} f(\zeta)\left(\zeta-\frac{z-\bar{z}}{2}\right)(z-\zeta)^{\frac{k}{2}-1}(\bar{z}+\zeta)^{\frac{k}{2}-1}d\zeta,$$

где γ — замкнутый контур, описывающий точки z и $-\bar{z}$ в положительном направлении. При k, не равном целому числу, эти производные вычисляются дифференцированием под знаком интегралов правых частей следующих равенств

$$\widetilde{u}(x, y) = \frac{1}{(1-e^{ik\pi})^2}\,\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma'} f(\zeta)\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^{1-k}(z-\zeta)^{\frac{k}{2}-1}(\bar{z}+\zeta)^{\frac{k}{2}-1}d\zeta,$$

$$i\widetilde{v}(x, y) = \frac{1}{(1-e^{ik\pi})^2}\,\frac{1}{2}\int\limits_{\gamma'} f(\zeta)\left(\zeta-\frac{z-\bar{z}}{2}\right)(z-\zeta)^{\frac{k}{2}-1}(\bar{z}+\zeta)^{\frac{k}{2}-1}d\zeta,$$

где γ' — замкнутый контур, описывающий точки z и $-\bar{z}$ в положительном направлении, а затем в той же последовательности — в отрицательном направлении. Подстановка вычисленных обобщенных производных по z в условия (4) — (5) обращает их в тождество. В части области $G+G^*$, непосредственно примыкающей к L, в качестве Γ можем взять прямолинейный отрезок. В этом случае (1) совпадает с интегральным преобразованием, введенным в работах [г), д)]. Из формул обращения последнего следует, что данной x^k-аналитической функции $\widetilde{f}(z)$ в области G может соответствовать только одна аналитическая функция и $\widetilde{v}|_L = 0$. Этим теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнено одно из следующих условий:*

а) функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитическая в области G, Γ — контур в области G, соединяющий фиксированную точку a, лежащую в области G или на ее границе, с точкой $z = x + iy$;

б) функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитическая в области G^*, Γ — контур, соединяющий точку $-\bar{z} = -x + iy$ с фиксированной точкой $-\bar{a}$, лежащей в области G^* или на ее границе.

Тогда функция

$$\widetilde{f}(z) = \widetilde{u}(x, y) + i\widetilde{v}(x, y) = \mathrm{Re}\int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^{1-k}(z-\zeta)^{\frac{k}{2}-1}(\bar{z}+\zeta)^{\frac{k}{2}-1}d\zeta +$$

$$+\, i\,\mathrm{Im}\int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\left(\zeta-\frac{z-\bar{z}}{2}\right)(z-\zeta)^{\frac{k}{2}-1}(\bar{z}+\zeta)^{\frac{k}{2}-1}d\zeta, \qquad (6)$$

*будет x^k-аналитической в области G, если k равно целому четному числу, и будет x^k-аналитической в области G с выкинутой точкой $z = a$, если k не равно целому четному числу**.

* Предполагается, что если точка a (или $-\bar{a}$) является граничной, то $|f(\zeta)| = C\left(\frac{1}{r^\alpha}\right)$, где $\alpha = \mathrm{const} < 1$, r — расстояние точки ζ от точки a (или $-\bar{a}$).

Двум различным аналитическим функциям в области G (или G^*) интегральное преобразование (6) ставит в соответствие две различные x^k-аналитические функции в G, если область G (или G^*) содержит прямолинейный отрезок, выходящий из точки a (или $-a$), параллельный вещественной оси.

В самом деле, в случае a) равенство (6) эквивалентно следующим двум равенствам

$$\widetilde{u}(x, y)=\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma^*} f^*(\zeta)\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^{1-k}(z-\zeta)^{\frac{k}{2}-1}(\bar{z}+\zeta)^{\frac{k}{2}-1}\,d\zeta+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^{1-k}(z-\zeta)^{\frac{k}{2}-1}(\bar{z}+\zeta)^{\frac{k}{2}-1}\,d\zeta, \tag{7}$$

$$i\widetilde{v}(x, y)=\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma^*} f^*(\zeta)\left(\zeta-\frac{z-\bar{z}}{2}\right)(z-\zeta)^{\frac{k}{2}-1}(\bar{z}+\zeta)^{\frac{k}{2}-1}\,d\zeta+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} f(\zeta)\left(\zeta-\frac{z-\bar{z}}{2}\right)(z-\zeta)^{\frac{k}{2}-1}(\bar{z}+\zeta)^{\frac{k}{2}-1}\,d\zeta, \tag{8}$$

где Γ^* — контур, симметричный с Γ относительно мнимой оси, соединяющий точку $-\bar{z}=x+iy$ с точкой $-\bar{a}$, $f^*(z)$ — функция, аналитическая в области G^*, определенная равенством $f^*(z)=\overline{f(-\bar{z})}$ при $z\subset G^*$. В остальном доказательство теоремы такое же, как и в предыдущем случае, только при k, не равном целому четному числу, интегралы правых частей равенств (7) и (8) по Γ и по Γ^* выражаются через интегралы по контуру, идущему из точки a, обходящему в положительном направлении точку z и возвращающемуся в точку a, и, соответственно, через интегралы по контуру, идущему из точки $-\bar{a}$, обходящему в положительном направлении точку $-\bar{z}$ и возвращающемуся в точку $-\bar{a}$. При k, равном целому четному числу, если точка a лежит внутри G, она будет точкой однозначности функции $\tilde{f}(z)$ и по теореме об устранимой особой точке p-аналитических функций [a), $б$)] она будет точкой x^k-аналитичности. Если Γ — прямолинейный отрезок, то интегральное преобразование (6) однозначно обратимо относительно $u(x, \beta)$ и $v(x, \beta)$ ($\beta=\operatorname{Im} a$), в чем убеждаемся дифференцированием (6) по x^2 и решением уравнения Абеля с пределами интегрирования от α до x ($\alpha=\operatorname{Re} a$). Отсюда, в силу свойства единственности x^k-аналитических функций, вытекает справедливость последнего из утверждений теоремы. В случае $б$) доказательство утверждений теоремы такое же.

Следствие 1. Если область G в составе своей границы содержит отрезок L мнимой оси, $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ — функция, аналитическая в области $G+G^*$, Γ — контур в $G+G^*$, соединяющий точки $-\bar{z}$ и z, то функция $\tilde{f}(z)=\tilde{u}(x, y)+i\tilde{v}(x, y)$, определенная равенством (6), будет x^k-аналитической в области G.

Следствие 2. Если область G в составе своей границы имеет бесконечно удаленную точку и $a=\infty$, а $f(z)$ удовлетворяет дополнительному условию $|f(z)|=O(\frac{1}{|z|^{\alpha}})$ ($\alpha=\text{const}>k$) при подходе к бесконечности вдоль контура Γ, то функция $\widetilde{f}(z)=\widetilde{u}(x, y)+i\widetilde{v}(x, y)$, определенная равенством (6), будет x^k-аналитической в области G. Если G содержит прямолинейный отрезок, выходящий из точки $a=\infty$, параллельный вещественной оси, то двум различным аналитическим в G функциям интегральное преобразование (6) ставит в соответствие две различные x^k-аналитические функции в области G.

Теорема 3. *Пусть выполнено одно из следующих условий:*

а) *функция* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, *аналитическая в области* G, Γ,— *контур в области* G, *начальная точка* a *и конечная точка* b *которого фиксированы, отличны друг от друга и, по крайней мере, одна из них не лежит на мнимой оси;*

б) *функция* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, *аналитическая в области* G^*, Γ — *контур в области* G^*, *начальная точка* — $\bar{b}$ *и конечная точка* — $\bar{a}$ *которого фиксированы, отличны друг от друга и, по крайней мере, одна из них не лежит на мнимой оси.*

Тогда функция $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, *определенная равенством* (6), *будет* x^k*-аналитической в правой полуплоскости* $z=x+iy$, *если* k *равно целому четному числу, а при* k, *не равном целому четному числу, будет* x^k*-аналитической в правой полуплоскости* $z=x+iy$ *с выкинутыми точками* a *и* b.

Для доказательства теоремы в случае *а*) достаточно равенство (6) записать в виде равенств (7) и (8), вычислить обобщенные производные по z от $\tilde{u}(x, y)$ и $i\tilde{v}(x, y)$ под знаком интегралов и воспользоваться теоремой об устранимой особой точке p-аналитических функций, а также возможностью варьирования контура Γ при фиксированных его концевых точках. В случае *б*) доказательство утверждений теоремы такое же.

Следствие. Если область G в составе своей границы содержит бесконечно удаленную точку и $b = \infty$, $\operatorname{Re} a > 0$, а $f(z)$ удовлетворяет дополнительному условию $|f(z)| = O\left(\frac{1}{|z|^\alpha}\right)$ $(\alpha = \text{const} > k)$ при подходе к бесконечности вдоль контура Γ, то функция $\tilde{f}(z) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$, определенная равенством (6), будет x^k-аналитической в правой полуплоскости $z = x + iy$, если k равно целому четному числу, а при k, не равном целому четному числу, будет x^k-аналитической в правой полуплоскости $z = x + iy$ с выкинутой точкой $z = a$.

Теорема 4. *Пусть* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — *функция, аналитическая в области* G, Γ — *простой контур в* G, *начальная точка* a *и конечная точка* b *которого фиксированы, отличны друг от друга и лежат на мнимой оси,* g — *область или совокупность областей в конечной части правой полуплоскости* $z = x + iy$, *ограниченных контуром* Γ *и мнимой осью. Тогда правая часть равенства* (6) *представляет собой* x^k*-аналитическую функцию в* g *и* x^k*-аналитическую функцию в правой полуплоскости* $z = x + iy$ *вне* g.

Теорема 5. *Пусть* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — *функция, аналитическая в области* G, Γ — *простой контур в области* G, *начальная точка* a *и конечная точка* b *которого совпадают. Тогда правая часть равенства* (6) *представляет собой функцию* x^k*-аналитическую внутри контура* Γ *и* x^k*-аналитическую вне контура* Γ *в правой полуплоскости* $z = x + iy$, *причем последняя тождественно равна нулю, если область* G *односвязна.*

Доказательство теорем 4 и 5 аналогично доказательству предыдущих теорем.

Будем говорить, что функция $F(\zeta) = U(\xi, \eta) + iV(\xi, \eta)$, определенная в точках того или иного контура, удовлетворяет условию P_α, если она на этом контуре непрерывна, за исключением отдельных точек ζ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, при подходе к которым $|f(\zeta)| = O\left(\frac{1}{|\zeta - \zeta_i|^\alpha}\right)$, $0 < \alpha = \text{const} < 1$.

Теорема 6. *Пусть* Γ — *контур в плоскости* $z = x + iy$, *симметричный относительно мнимой оси,* $f(\zeta) = u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta)$ *и* $\omega(\zeta) = \alpha(\xi, \eta) + i\beta(\xi, \eta)$ — *функции, определенные на* Γ *и удовлетворяющие условию* P_α *при* $0 < \alpha < 1$ *и соответственно при* $\alpha = 0$, $f(-\bar{\zeta}) = \overline{f(\zeta)}$, $\omega(-\bar{\zeta}) = -\overline{\omega(\zeta)}$, C — *множество точек* $z = \omega(\zeta)$ *при* $\zeta \subset \Gamma$. *Тогда интеграл*

$$\widetilde{f}(z) = \widetilde{u}(x, y) + i\widetilde{v}(x, y) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} f(\zeta)\left[\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^{1-k} + \omega(\zeta) - \right.$$

$$\left. - \frac{z-\bar{z}}{2}\right](z-\omega(\zeta))^{\frac{k}{2}-1}(\bar{z}+\omega(\zeta))^{\frac{k}{2}-1}\,d\zeta \qquad (9)$$

представляет собой x^k-аналитическую функцию в каждой из областей, на которые разбивается правая полуплоскость $z = x + iy$ множеством точек C и мнимой осью.

Для доказательства теоремы достаточно равенство (9) записать в виде двух равенств

$$\widetilde{u}(x, y) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} f(\zeta)\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^{1-k}(z-\omega(\zeta))^{\frac{k}{2}-1}(\bar{z}+\omega(\zeta))^{\frac{k}{2}-1}\,d\zeta, \qquad (10)$$

$$i\widetilde{v}(x, y) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma} f(\zeta)\left[\omega(\zeta) - \frac{z-\bar{z}}{2}\right](z-\omega(\zeta))^{\frac{k}{2}-1}(\bar{z}+\omega(\zeta))^{\frac{k}{2}-1}\,d\zeta \qquad (11)$$

и вычислить обобщенные производные по z от $\widetilde{u}(x, y)$ и $i\widetilde{v}(x, y)$ дифференцированием правых частей равенств (10) и (11) под знаком интегралов.

Теорема 7. *Пусть Γ — контур в правой или в левой полуплоскости $z = x + iy$, $f(\zeta) = u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta)$ и $\omega(\zeta) = \alpha(\xi, \eta) + i\beta(\xi, \eta)$ — функции, определенные на Γ и удовлетворяющие условию P_α при $0 \leqslant \alpha < 1$ и соответственно при $\alpha = 0$, C — множество точек $z = \omega(\zeta)$ при $\zeta \subset \Gamma$, C^* — множество точек, симметричное с C относительно мнимой оси. Тогда интеграл*

$$\widetilde{f}(z) = \widetilde{u}(x, y) + i\widetilde{v}(x, y) =$$

$$= \operatorname{Re}\int_{\Gamma} f(\zeta)\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^{1-k}(z-\omega(\zeta))^{\frac{k}{2}-1}(\bar{z}+\omega(\zeta))^{\frac{k}{2}-1}\times d\zeta +$$

$$+ i\operatorname{Im}\int_{\Gamma} f(\xi)\left[\omega(\zeta) - \frac{z-\bar{z}}{2}\right](z-\omega(\zeta))^{\frac{k}{2}-1}(\bar{z}+\omega(\zeta))^{\frac{k}{2}-1}\,d\zeta \qquad (12)$$

представляет собой x^k-аналитическую функцию в каждой из областей, на которые разбивается правая полуплоскость $z = x + iy$ множеством точек $C + C^*$ и мнимой осью.

Доказательство этой теоремы сводится к теореме 6, если на контуре Γ^*, симметричном с Γ относительно мнимой оси доопределить функции $f(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$ так, чтобы $f(-\bar{\zeta}) = \overline{f(\zeta)}$, $\omega(-\bar{\zeta}) = -\overline{\omega(\zeta)}$ при $\zeta \subset \Gamma$.

Следствие 3. Если функции $f(\zeta) = u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta)$ и $\omega(\zeta) = \alpha(\xi, \eta) + i\beta(\xi, \eta)$, аналитические в области, содержащей контур Γ и в концевых точках a и b этого контура $\frac{d\omega(\zeta)}{d\zeta} \neq 0$, то функция $\widetilde{f}(z) = \widetilde{u}(x, y) + i\widetilde{v}(x, y)$, определенная равенством (12), будет x^k-аналитической в правой полуплоскости $z = x + iy$, если k равно целому четному числу, а при k, не равном целому четному числу, будет x^k-аналитической в правой полуплоскости $z = x + iy$ с выкинутыми точками $\omega(a)$ (или $-\overline{\omega(a)}$, если $\operatorname{Re}\omega(a) < 0$) и $\omega(b)$ (или $-\overline{\omega(b)}$, если $\operatorname{Re}\omega(b) < 0$).

ЛИТЕРАТУРА

Г. Н. Положий, а). О p-аналитических функциях комплексного переменного, ДАН СССР, т. 58, № 7, 1947;

б). Особые точки и вычеты p-аналитических функций комплексного переменного ДАН СССР, т. 60, № 5, 1948.

в). К вопросу о $(p.q)$-аналитических функциях и их применениях, Rev. Math. pur. et appl., v. 2, 1957;

г). Про одне інтегральне перетворення узагальнених аналітичних функцій, Вісник КДУ, сер. астр., матем. та мех., № 2, вип. 1, 1959;

д). О краевых задачах осесимметричной теории упругости. Метод p-аналитических функций комплексного переменного, Укр. матем. ж., т. XV, № 1, 1963;

е). О применении обобщенной производной к одному классу квазиконформных отображений, ДАН СССР, т. 63, № 6, 1949.

Поступила 3.X 1963 г.
Киев