1964 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ Т. XVI, № 3
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

О применении метода Чебышева — Бернштейна к одному классу экстремальных функций, удовлетворяющих нескольким соотношениям, линейным относительно коэффициентов

И. А. Григорьева

1. В теории монотонных полиномов степени не выше данной с вещественными коэффициентами, наименее уклоняющихся от нуля на некотором конечном промежутке (например, на сегменте $[-1, +1]$) вещественной оси, рассматривают, главным образом, полиномы, монотонные либо на том же промежутке, либо на всей вещественной оси.

Чтобы объединить эти два случая, будем рассматривать полиномы, монотонные на сегменте $[-a, a]$ (конечном или бесконечном).

Нормируя такие полиномы $P_{n+1}(x)$ степени не выше $n+1$ условием $P_{n+1}(-1) = 0$, представим их в виде

$$P_{n+1}(x) = \int_{-1}^{x} y_n(t)\,dt,$$

$$\text{где } y_n(t) = \sum_{k=0}^{n} p_k t^k \geqslant 0 \text{ при } t \in [-a, a].$$

Непосредственным обобщением класса монотонных полиномов является класс кратно-монотонных полиномов.

Когда $a \leqslant 1$, полиномы, кратно-монотонные порядка $h+1$ на сегменте $[-a, a]$, могут быть представлены в форме

$$P_{n+1}(x) = \int_{-1}^{x} (x-t)^h y_{n-h}(t)\,dt, \tag{1}$$

где $y_{n-h}(t) \geqslant 0$ при $t \in [-a, a]$, если речь идет об экстремальных полиномах.

Если же $a > 1$, то положим, что h есть четное число ($h = 2i$). Тогда будут неотрицательными на $[-a, a]$ все производные полинома (1) нечетных порядков до $h+1$-го порядка включительно.

Пусть $a \geqslant 1$. Ставится задача: найти наименьшую осцилляцию полиномов (1) на отрезке $[-1, 1]$, т. е. минимум интеграла

$$\int_{-1}^{1} (1-t)^h y_{n-h}(t)\,dt, \tag{2}$$

если коэффициенты полиномов $y_{n-h}(t)$ связаны одним или несколькими линейными допустимыми соотношениями вида

$$\omega_j\{y_{n-h}(t)\} \equiv \sum_{k=0}^{n-h} p_k a_{kj} = A_j, \quad j = \overline{1, s}, \tag{3}$$

где a_{kj} и A_j суть данные вещественные числа, причем хотя бы одно из чисел A_j не равно нулю.

2. Существенную роль в решении задачи играет установление формы полиномов, среди которых содержатся экстремальные (т. е. реализующие минимум интеграла (2)) полиномы.

К числу общих результатов, полученных в этом направлении, принадлежат теоремы, доказанные Б. А. Рымаренко [1, 2, 3], установившего, что экстремальные полиномы $P^*_{n+1}(x) \in T^{(h)}_{n+1}$ (т. е. кратно-монотонные порядка $h+1$ на сегменте $[-1, 1]$) содержатся при $s = 1$ среди полиномов вида

$$P_{n+1}(x) = \int_{-1}^{x} (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}(x-t)^h u_m^2(t)\, dt, \tag{4}$$

где α и β суть числа, равные 0 или 1, $u_m(t)$ — полином степени m, все корни которого вещественны и расположены в промежутке $[-1, 1]$.

Экстремальные полиномы $P^*_{n+1}(x) \in B^{(i)}_{n+1}$ ($B^{(i)}_{n+1}$ есть класс полиномов, имеющих неотрицательные на всей вещественной оси производные всех нечетных порядков до $(2i+1)$-го порядка включительно и неотрицательные в точке $x = -1$ производные всех четных порядков до $2i$-го порядка включительно) при $s \leqslant 2$ можно искать в виде

$$P_{n+1}(x) = \int_{-1}^{x} (x-t)^{2i} u_m^2(t)\, dt, \tag{5}$$

где полином $u_m(t)$ имеет только вещественные корни.

Если $s > 1$ для $P_{n+1}(x) \in T^{(h)}_{n+1}$ и $s > 2$ для $P_{n+1}(x) \in B^{(i)}_{n+1}$, то формы (4) и (5) экстремальных полиномов места, вообще говоря, не имеют. Поэтому представляет значительный интерес, во-первых, определить при любом количестве соотношений между коэффициентами вид полиномов, среди которых находятся экстремальные полиномы, и, во-вторых, установить добавочные соотношения, кроме данных, которым должны подчиняться коэффициенты экстремальных полиномов.

3. Пусть $p(x)$ — заданная функция, суммируемая в промежутке $[-1, 1]$, и $y_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k x^k$ суть полиномы степени $\leqslant n$ с вещественными коэффициентами, неотрицательные на данном сегменте $[-a, a]$ и удовлетворяющие s соотношениям:

$$\omega_j\{y_n(x)\} \equiv \sum_{k=0}^{n} p_k a_{kj} = A_j, \quad j = \overline{1, s}, \tag{6}$$

где a_{kj} и A_j — данные вещественные числа $\left(\sum\limits_{j=1}^{s} |A_j| \neq 0\right)$. Предполагаем дополнительно, что соотношения (6) таковы, что линейные формы

$$\omega_j\{y_n(x)\}, \quad j = \overline{1, s}, \text{ и } y_n(\eta_\iota) = \sum_{k=0}^{n} p_k \eta_\iota^k, \quad \iota = 1, 2, \ldots, \varrho,$$

коэффициентов p_k являются линейно независимыми. Здесь η_i — вещественные и различные корни уравнения $y_n(x) = 0$, расположенные внутри интервала $(-a, a)$. Тогда имеет место теорема.

Теорема. *Минимум интеграла*

$$L_{y_n}\{p\} = \int_{-1}^{1} p(x)\, y_n(x) dx \tag{7}$$

реализуется полиномом вида

$$y_n^*(x) = \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\alpha} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\beta} u_m^2(x)\, q_r(x), \tag{8}$$

где α *и* β — *числа, равные 0 или 1,* $q_r(x)$ — *полином степени* $r < s$, *все вещественные корни которого расположены вне сегмента* $[-a, a]$, $u_m(x)$ — *полином степени* $m\,(2m + \alpha + \beta + r = n)$, *имеющий лишь вещественные корни, принадлежащие промежутку,* $[-a, a]$.

Если $m + r \geqslant s$, *коэффициенты полинома* $u_m(x)$ *удовлетворяют системе уравнений:*

$$\begin{vmatrix} \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\alpha} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\beta} p(x) u_m(x) x^{l} dx & \dots & \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\alpha} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\beta} p(x) u_m(x) x^{l+s} dx \\ \omega_1 \left\{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\alpha} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\beta} u_m(x)\, x^{l}\right\} & \dots & \omega_1 \left\{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\alpha} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\beta} u_m(x) x^{l+s}\right\} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \omega_s \left\{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\alpha} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\beta} u_m(x)\, x^{l}\right\} & \dots & \omega_s \left\{\left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\alpha} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\beta} u_m(x) x^{l+s}\right\} \end{vmatrix} = 0, l = 0, 1, \dots, m + r - s. \tag{9}$$

4. Приступая к доказательству теоремы, прежде всего, отметим, что любой неотрицательный на сегменте $[-a, a]$ полином всегда может быть представлен в форме (8), где числа α и β равны 0 или 1 *и* $q_r(x)$ — полином, все вещественные корни которого расположены вне сегмента $[-a, a]$.

Поэтому достаточно доказать, что для экстремального полинома $y_n^*(x)$ имеет место система уравнений (9) и выполняется условие $r < s$.

5. Начнем с доказательства того, что $r < s$. Пусть для экстремального полинома $y_n^*(x)$ будет $r \geqslant s$.

Рассмотрим полином

$$\widetilde{y}_n(x) = y_n^*(x) - \lambda \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\alpha} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\beta} u_m^2(x) \sum_{k=0}^{s} \alpha_k x^k =$$

$$= \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\alpha} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\beta} u_m^2(x) \left[q_r(x) - \lambda \sum_{k=0}^{s} \alpha_k x^k \right],$$

где коэффициенты α_k выбраны так, что

$$\sum_{k=0}^{s} \alpha_k \omega_i \left\{ \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\alpha} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\beta} u_m^2(x)\, x^k \right\} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, s,$$

и $|\lambda|$ взята достаточно малой, чтобы было $\widetilde{y_n}(x) \geqslant 0$ при $x \in [-a, \ a]$. Тогда, если

$$\sum_{k=0}^{s} \alpha_k \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\alpha} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\beta} p(x)\, u_m^2(x)\, x^k dx \neq 0,$$

всегда можно выбрать знак λ таким образом, чтобы

$$L_{\widetilde{y_n}}\{p\} < L_{y_n^*}\{p\}.$$

Следовательно, полином $y_n^*(x)$ будет экстремальным только в том случае, если выполняется равенство

$$\sum_{k=0}^{s} \alpha_k \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\alpha} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\beta} p(\alpha)\, u_m^2(x)\, x^k dx = 0,$$

но тогда $L_{\widetilde{y_n}}\{p\} = L_{y_n^*}\{p\}$.

Увеличиваем непрерывно $|\lambda|$, пока не достигнем такого его значения $\lambda = \lambda_0$, что

$$q_r(x) - \lambda_0 \sum_{k=0}^{s} \alpha_k x^k$$

будет иметь хоть один двойной корень $x_0 \in [-a, \ a]$.

Значит, полином $y_n^*(x)$ можно заменить другим полиномом, у которого степень r множителя $q_r(x)$ будет ниже*.

6. Докажем теперь, что при $m + r \geqslant s$ коэффициенты полинома $u_m(x)$ удовлетворяют системе уравнений (9).

Пусть $m + r = s + \tau$, $\tau \geqslant 0$.

Обозначим через $\psi(x)$ какой-либо полином, степень которого не превышает $2m + r$, удовлетворяющий условиям

$$\omega_j \left\{ \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\alpha} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\beta} \psi(x) \right\} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, s,$$

$$\psi(\eta_i) = B_i^2 > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, \varrho.$$

Здесь B_i — произвольные вещественные числа, не равные нулю, η_i — различные корни полинома $u_m(x)$. Такие полиномы при условиях, налагаемых на соотношения (6), всегда существуют.

---

* Приведенное выше доказательство аналогично доказательству С. Н. Бернштейна [4] теорем о форме экстремальных тригонометрических полиномов при наличии одного или двух соотношений между коэффициентами.

Введем обозначение

$$F_l(x;\ \lambda) = u_m(x)\sum_{k=0}^{s}\alpha_{kl}x^{k+l} - \lambda\psi(x), \quad l = \overline{0,\ \tau},$$

где коэффициенты α_{kl} при каждом значении l определяются системой уравнений

$$\sum_{k=0}^{s}\alpha_{kl}\omega_j\left\{\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\beta}u_m(x)\,x^{k+l}\right\} = 0, \quad j = \overline{1,\ s}. \qquad (10)$$

Тогда полиномы

$$\widetilde{y}_n(x) = y_n^*(x) - \lambda_1\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\beta}F_l(x;\ \lambda)$$

удовлетворяют соотнощениям (6). Параметры λ и λ_1 подчиняем пока единственному условию $\lambda\lambda_1 > 0$.
Имеем

$$L_{\widetilde{y}_n}\{p\} = L_{y_n^*}\{p\} - \lambda_1\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\beta}p(x)\,F_l(x;\ \lambda)\,dx.$$

Пусть хотя бы при одном значении l, $l = 0, 1, \ldots, \tau$, имеет место неравенство

$$\sum_{k=0}^{l}\alpha_{kl}\int_{-1}^{1}\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\beta}p(x)\,u_m(x)\,x^{k+l}dx \neq 0. \qquad (11)$$

Тогда соответствующим выбором параметра λ (а следовательно, и знака λ_1) всегда можно достичь того, что

$$L_{\widetilde{y}_n}\{p\} < L_{y_n^*}\{p\}. \qquad (12)$$

Фиксируем значение λ таким образом, чтобы выполнялось неравенство (12), и докажем, что при достаточно малом $|\lambda_1|$

$$\widetilde{y}_n(x) = \left(1-\frac{x}{a}\right)^{\alpha}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\beta}\Phi(x;\ \lambda_1) \geqslant 0$$

для всех $x \in [-a,\ a]$. Здесь

$$\Phi(x;\ \lambda_1) = u_m^2(x)\,q_r(x) - \lambda_1 F_l(x;\ \lambda).$$

Действительно, для значений $x = \eta_i$, $i = \overline{1,\ \varrho}$, имеем

$$\Phi(\eta_i;\ \lambda_1) = -\lambda_1 F_l(\eta_i;\ \lambda) = \lambda\lambda_1 B_i^2 > 0.$$

Отсюда следует существование таких окрестностей $E_i(\varepsilon)$ точек η_i, что

$$\Phi(x;\ \lambda_1) > 0$$

при $x \in E_i(\varepsilon)$, $i = 1, 2, \ldots, \varrho$, причем величина ε не зависит от λ_1, так как достаточно, чтобы окрестности $E_i(\varepsilon)$ были расположены внутри интервалов, в которых $F_l(x;\ \lambda)$ сохраняет знак.

Рассмотрим далее множество $T(\varepsilon)$ остальных точек сегмента $[-a,\ a]$, не принадлежащих ни одной из окрестностей $E_i(\varepsilon)$.

Так как $u_m^2(x) q_r(x) > \delta^2$, где $\delta^2 > 0$ — некоторое определенное число, для всех $x \in T(\varepsilon)$, то всегда можем взять $|\lambda_1|$ достаточно малым, чтобы

$$\Phi(x;\ \lambda_1) > 0 \text{ при } x \in T(\varepsilon).$$

Следовательно, полином $\widetilde{y}_n(x)$ является действительно полиномом сравнения и,

$$L_{\widetilde{y}_n}\{p\} < L_{y_n^*}\{p\},$$

если выполняется хотя бы одно из неравенств (11).

Таким образом, полином (8) будет экстремальным при $m + r \geqslant s$ только в том случае, если имеют место уравнения

$$\sum_{k=0}^{s} \alpha_{kl} \int_{-1}^{1} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{\alpha} \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{\beta} p(x)\, u_m(x)\, x^{k+l} dx = 0 \tag{13}$$

для всех l, $l = \overline{0,\ \tau}$.

Исключая из уравнений (10) и (13) величины α_{kl}, получаем систему уравнений (9).

Теорема, таким образом, полностью установлена.

7. Рассмотрим класс функций

$$f_n(x) = \int_{-1}^{x} (x - t)^h p_1(t)\, y_n(t)\, dt, \tag{14}$$

где $h \geqslant 0$ — заданное целое число, $p_1(t)$ — данная суммируемая неотрицательная при $t \in [-a,\ a]\,(a \geqslant 1)$ функция, $y_n(t)$ есть, как и раньше, неотрицательный при $t \in [-a,\ a]$ полином степени не выше n с вещественными коэффициентами.

Если $a = 1$, функции (14) будут кратно-монотонными на $[-a,\ a]$ порядка $h + 1$. Если же $a > 1$, то положим, что h — четное число. Тогда будут неотрицательными на $[-a,\ a]$ все производные функции $f_n(x)$ нечетных порядков до $(h+1)$-го порядка включительно.

Осцилляция функции $f_n(x)$ на сегменте $[-1,\ 1]$ будет равна:

$$f_n(1) = \int_{-1}^{1} (1 - t)^h p_1(t)\, y_n(t)\, dt = L_{y_n}\{p\},$$

где $p(t) = (1 - t)^h p_1(t)$.

Следовательно, задача о нахождении наименьшей осцилляции на $[-1,\ 1]$ функции (14) сводится к нахождению минимума интеграла (7).

Таким образом, доказанная теория может быть применена к решению экстремальных задач для монотонных функций довольно широкого класса, наименее уклоняющихся от нуля в некотором промежутке, и, что представляется нам ценным, дает возможность определять не только наименьшую осцилляцию, но и устанавливать форму экстремальных функций.

Отметим, что если функция $p_1(t)$ содержит множители

$$(t - x_1)^{2\tau_1} \ldots (t - x_\nu)^{2\tau_\nu},$$

где $\tau_1, \ldots, \tau_\nu$ — заданные целые неотрицательные числа, $x_1, \ldots, x_\nu$ — некоторые точки промежутка $[-a,\ a]$, то функция $f_n(x)$, кроме соотношений, накладываемых на коэффициенты полинома $y_n(t)$, будет дополнительно удовлетворять $2\tau_1 + \ldots + 2\tau_\nu$ условиям:

$$f_n^{(h+1)}(x)_i = \ldots = f_n^{(h+\tau_i)}(x_i) = 0, \quad i = \overline{1, \nu}.$$

8. Ограничимся сейчас рассмотрением двух экстремальных задач теории монотонных полиномов.

Задача 1. Найти наименьшую осцилляцию в промежутке $[-1, 1]$ полинома $P_N(x)$ степени не выше N, кратно-монотонного порядка $h+1$ на том же сегменте $[-1, 1]$, удовлетворяющего $\tau + 1$ соотношениям

$$P_N^{(h+1)}(+1) = \ldots = P_N^{(h+\tau)}(+1) = 0 \tag{15}$$

и

$$P_N^{(h+\tau+1)}(+1) = K \tag{16}$$

(здесь $K \neq 0$ — данное вещественное число).

Требуется также определить вид экстремального полинома.

Приступая к решению задачи, прежде всего, отметим, что экстремальные полиномы $P_N^*(x) \in T_N^{(h+1)}$, удовлетворяющие условиям (15), содержатся среди полиномов вида

$$P_N(x) = \int_{-1}^{x} (x-t)^h (1-t)^\tau y_n(t)\,dt, \tag{17}$$

где $y_n(t) \geqslant 0$ при $t \in [-1, 1]$, $n = N - h - \tau - 1$. Осцилляция полиномов (17) на отрезке $[-1, 1]$ будет равна:

$$P_N(1) = \int_{-1}^{1} (1-t)^{h+\tau} y_n(t)\,dt. \tag{18}$$

Коэффициенты полиномов $y_n(t)$ должны удовлетворять соотношению

$$y_n(1) = A^2, \quad A^2 = \frac{|K|}{h!\tau!}. \tag{19}$$

Следовательно, задача может быть сформулирована так: из всех полиномов $y_n(t)$ степени не выше n, неотрицательных на $[-1, 1]$ и удовлетворяющих условию (19), найти полиномы, реализующие минимум интеграла (18).

Согласно доказанной теореме, экстремальный полином может быть представлен в виде

$$y_n^*(t) = (1+t)^\beta u_m^2(t),$$

где β равно 0 или 1 и коэффициенты полинома $u_m(t)$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\int_{-1}^{1} (1-t)^{h+\tau+1} (1+t)^\beta u_m(t)\, t^l dt = 0, \quad l = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Отсюда вытекает, что

$$u_m(t) = \alpha_m P_m^{(\alpha, \beta)}(t),$$

где α_m — постоянный коэффициент, а $P_m^{(\alpha, \beta)}(t)$ — полином Якоби с ,,весом"

$$(1-t)^\alpha (1+t)^\beta$$

(здесь $\alpha = \tau + h + 1$, β имеет прежнее значение).

Из соотношения (19) определяем α_m^2: $\alpha_m^2 = \dfrac{A^2}{2^\beta [P_m^{(\alpha,\beta)}(1)]^2}$.

Тогда:

$$P_N^*(x) = \frac{A^2}{2^\beta [P_m^{(\alpha,\beta)}(1)]^2} \int_{-1}^{x} (x-t)^h (1-t)^\tau (1+t)^\beta [P_m^{(\alpha,\beta)}(t)]^2 dt$$

и

$$L_N^{(h+1)} = P_N^*(1) = \frac{2^\alpha \alpha! m! (\alpha-1)! (\beta+m)!}{(\alpha+m)! (\alpha+\beta+m)!} A^2 =$$

$$= \frac{2^\alpha \alpha! (\alpha-1)! m! (\beta+m)!}{(\alpha+m)! (\alpha+\beta+m)! h! \tau!} |K|. \qquad (20)$$

Частным случаем результата (20) являются известные результаты С. Н. Бернштейна [5] (при $h = \tau = \beta = 0$) и С. Н. Бернштейна, В. Ф. Бржечка и Б. А. Рымаренко [6] (при $h = 0$, $\tau = \beta = 1$, $N = 2m+3$).

Задача 2. Среди полиномов $P_N(x) \in T_N$ нечетной степени ($N = 2m+1$) найти экстремальный на отрезке $[-1, 1]$, если дано:

$$P_N'(-1) = A^2 > 0, \quad P_N''(1) = B. \qquad (21)$$

Найти также величину наименьшей осцилляции L_N на $[-1, 1]$.

Эта задача была рассмотрена В. Ф. Бржечка и Я. Л. Геронимусом [7] при дополнительном условии $B \geqslant 0$, так как только в этом случае экстремальные полиномы содержатся среди полиномов

$$P_N(x) = \int_{-1}^{x} u_m^2(x)\, dx.$$

Приведем асимптотическое решение задачи В. Ф. Бржечка и Я. Л. Геронимуса:

$$2L_N \sim \frac{4A^2}{m^2} + \frac{z_0 B}{m^4},$$

где z_0 — наименьший положительный корень уравнения 4-й степени

$$\frac{8\left(\frac{z}{4}+4\right)\left(2-\frac{z}{2^4}\right)}{\left(\frac{z^2}{48}+2z-16\right)^2} = \frac{B}{A^2}.$$

Доказанная теорема позволяет очень просто решить эту же задачу при $B \leqslant 0$, причем найти точное значение L_N, а также сам экстремальный полином.

Действительно, если $B \leqslant 0$, то

$$P_N^*(x) = \int_{-1}^{x} (1-t)(h \pm t)\, u_m^2(t)\, dt, \qquad (22)$$

где $h \geqslant 1$ — постоянная величина и коэффициенты полинома $u_m(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\int_{-1}^{1} (1-t)^2 (1+t)\, u_m(t)\, t^l dt = 0, \quad l = 0, \ldots, \quad m-1.$$

Следовательно,

$$u_m(t) = \alpha_m P_m^{(2,1)}(t)$$

($P_m^{(2,1)}(t)$ — полином Якоби).

Вычислив коэффициенты α_m и h из уравнений (21) и подставив их значения в (22), получим для минимальной осцилляции L_N полинома $P_N(x)$ следующее значение:

$$L_N = \frac{2}{m(m+2)}\left[A^2 - \frac{4B}{(m+1)^2}\right].$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Рымаренко, О применении метода С. Н. Бернштейна в теории монотонных полиномов, ДАН СССР, т. 103, № 3, 1955.

2. Б. А. Рымаренко, О формах экстремальных кратно-монотонных полиномов, ДАН СССР, т. 119, № 1, 1958.

3. Б. А. Рымаренко, О некоторых вопросах теории приближения функции посредством полиномов, Л., 1951.

4. С. Н. Бернштейн, О приложении метода Чебышева к одному классу задач Л. Фейера, Изв. АН СССР, ОФМН, № 5, 1930.

5. С. Н. Бернштейн, Leçons sur les propriétés extremales, Paris, 1926.

6. С. Н. Бернштейн, В. Ф. Бржечка, Б. А. Рымаренко, О наименьшем отклонении от нуля монотонного в интервале (—1, 1) полинома $P_n(x)$, производные которого $P_n'(1)$ и $P_n''(1)$ даны, Записки Харьк. мат. об-ва, т. 4, № 3, 1929.

7. В. Ф. Бржечка, Я. Л. Геронимус, О монотонном полиноме, наименее уклоняющемся от нуля на данном интервале, если заданы значения его 2-х первых производных, Записки Харьк. мат. об-ва, т. 4, № 3, 1929.

Поступила 12.VI 1960 г.
Киев

On the application of the Chedyshev-Bernstein method to a class of extremal functions satisfying some relationships, linear with respect to the coefficients

I. A. Grigoryeva

Summary

The aim of the article is to establish the form of nonnegative polynomials $y(x)$ of a power which does not exceed the given one, limiting the integral

$$\int_{-1}^{1} p(x)\, y_n(x)\, dx$$

where $p(x)$ is the given summed function, if the coefficients of the polynomial $y(x)$ satisfy any number s of linear relationships.