Теорема об элементарных делителях для кольца дифференциальных операторов

П. С. Казимирский

Введение. Как известно, в случае дифференциального кольца с переменными коэффициентами* от одного дифференцирования имеет место теорема.

Пусть A — матрица с элементами из рассматриваемого кольца. Тогда существуют такие обратимые матрицы P и Q, что имеет место соотношение

$$PAQ = \begin{pmatrix} \partial_0 & & & & & 0 \\ & \partial_0 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot\ \partial_0 & \\ 0 & & & & & l \end{pmatrix},$$

где ∂_0 — единичный оператор.

В настоящей статье доказывается аналогичное предложение для дифференциального кольца $\Delta(\tau)$ с переменными коэффициентами от n дифференцирований. А именно, имеет место теорема.

Теорема. *Пусть A — матрица с элементами из $\Delta(\tau)$. Тогда существуют такие обратимые матрицы P и Q над $\Delta(\tau)$, что имеет место соотношение*

$$PAQ = \begin{pmatrix} \partial_0 & & & & 0 & & & & \\ & \partial_0 & & & & & & & \\ & & \cdot & & & & & & \\ & & & \cdot & & & & & \\ & & & & \cdot\ \partial_0 & & & & \\ 0 & & & & a & b & 0 & \dots & 0 \\ & & & & c & d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Если же матрица A квадратна порядка и ранга n, то соотношение* (1) *имеет вид*

* Определение дается ниже.
* См. [1], стр. 278.

$$PAQ = \begin{pmatrix} \partial_0 & & & & & 0 \\ & \partial_0 & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot\ \partial_0 & \\ 0 & & & & & l \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Обозначения. В дальнейшем будут приняты следующие обозначения:

τ — дифференциальное поле с n дифференцированиями $\partial_1, \partial_2, \ldots \partial_n$; τ будет предполагаться полным, т. е. τ содержит n «независимых» элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ таких, что якобиан $|\partial_i \alpha_j| \neq 0$; элементы τ будут обозначаться маленькими буквами греческого алфавита.

$\Delta(\tau)$ — кольцо дифференциальных операторов с коэффициентами из τ от n дифференцирований $\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n$*. Оно состоит из всех полиномов вида $\sum\limits_{i_1,\ldots,i_n} \alpha_{i_1,\ldots,i_n} \partial_1^{i_1} \ldots \partial_n^{i_n}$.

∂_0 — единица кольца $\Delta(\tau)$. Произведение операторов из $\Delta(\tau)$ определяется правилами: $\partial_0 a = a\partial_0 = a$ для всякого $a \in \Delta(\tau)$, $\partial_i(\alpha\,\partial_0) = \alpha\,\partial_i + (\partial_i\alpha)\,\partial_0$, $\alpha \in \tau$, $i = 1, \ldots, n$, и законами ассоциативности и дистрибутивчости.

Элементы $\Delta(\tau)$ будут обозначаться маленькими латинскими буквами.

Матрицы с элементами из $\Delta(\tau)$ обозначаются большими буквами латинского алфавита.

О построении оборотных матриц. Имеет место теорема.

Теорема 1. *Пусть* $(a\ \ b)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \partial_0$. (2)

Для того, чтобы матрица $(a\ \ b)$ *могла быть дополнена до обратимой, необходимо и достаточно, чтобы пересечение* $a\,\Delta(\tau) \cap b\,\Delta(\tau)$ *было главным правым идеалом.*

Необходимость. Пусть существуют такие r, $s \in \Delta(\tau)$, что матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ r & s \end{pmatrix}$ — обратима; тогда имеет место соотношение

$$\begin{pmatrix} a & b \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_0 & 0 \\ 0 & \partial_0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Докажем, что $ay = -bv$ является общим наименьшим правым кратным a и b, т. е. каждое общее правое кратное a и b есть правое кратное $ay = -bv$.

Рассмотрим множество всех столбцов, аннулирующих строку $(a\ \ b)$ справа**. Это множество есть правый $\Delta(\tau)$-модуль, содержащий в силу (3) элемент $\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$ и имеющий ранг 1 (см.[1], стр. 278). Поэтому, если $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ — любой отличный от нуля элемент рассматриваемого $\Delta(\tau)$-модуля, то найдутся такие k, $l \neq 0$, что

$$\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} k + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} l = 0. \tag{4}$$

* См. [2], стр. 101.

** Это множество непусто (см. [2], стр. 101) при любых a и b.

Умножая (4) слева на строку $(r\ s)$, получаем в силу (2):

$$k + pl = 0,$$

где $p = (r\ s)\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$. (5)

Сравнивая (4) и (5), получаем

$$\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} p = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix},$$

т. е. рассматриваемый $\Delta(\tau)$-модуль есть циклический и порождается элементом $\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$. А это значит, что $ay = -bv$ является общим наименьшим правым кратным элеменов a и b, т. е. $a\Delta(\tau) \cap b\Delta(\tau)$ — есть главный идеал. Этим необходимость доказана.

Достаточность. Имеет место лемма.

Лемма 1. *Пусть* $a, b, c, d \in \Delta(\tau)$ *и*

$$ac + bd = \partial_0. \tag{6}$$

Тогда существует такая матрица

$$T = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \neq 0$$

с элементами из $\Delta(\tau)$, *что* $(a\ b)T = (0\ 0)$ и $T^2 = T$.

Доказательство. Обозначим через $(a\ b):0$ правый $\Delta(\tau)$-модуль, состоящий из столбцов с элементами из $\Delta(\tau)$, аннулирующих $(a\ b)$. Тогда очевидно, имеет место изоморфизм:

$$\Delta(\tau) \cong V_2/(a\ b):0,$$

где V_2 — множество всех двухчленных столбцов с элементами из $\Delta(\tau)$ (правый единичный двухчленный $\Delta(\tau)$-модуль).

Так как $\Delta(\tau)$ есть циклический $\Delta(\tau)$-модуль, то и $V_2/(a\ b):0$ — циклический и $V_2/(a\ b):0$ в силу (6), очевидно, порождается смежным классом:

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} + (a\ b):0.$$

Тогда, так как элементы $\begin{pmatrix} \partial_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ \partial_0 \end{pmatrix}$ принадлежат V_2, а значит, и некоторым смежным классам фактор-модуля $V_2/(a\,b):0$, имеем:

$$\begin{pmatrix} \partial_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} g + \begin{pmatrix} p \\ t \end{pmatrix}, \quad g,\ h \in \Delta(\tau),$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \partial_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} h + \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix} \in (a\,b):0$$

или

$$\begin{pmatrix} cg + p & ch + q \\ dg + t & dh + s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_0 & 0 \\ 0 & \partial_0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Выражение (7) может быть записано также в виде

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}(g\ h) + \begin{pmatrix} p & q \\ t & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_0 & 0 \\ 0 & \partial_0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Умножая (8) на строку $(a\,b)$, получаем $(g\,h)=(a\,b)$, т. е. имеет место равенство

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}(a\ \ b)+\begin{pmatrix} p & q \\ t & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \partial_0 & 0 \\ 0 & \partial_0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Умножая (9) справа на матрицу $\begin{pmatrix} p & q \\ t & s \end{pmatrix}$ получаем $\begin{pmatrix} p & q \\ t & s \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} p & q \\ t & s \end{pmatrix}$; так как $(a\,b)\begin{pmatrix} p & q \\ t & s \end{pmatrix}=(0\,0)$, то лемма 1 доказана.

По предположению теоремы $(a\ \ b)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=\partial_0$; $a,\ b,\ c,\ d\in\Delta(\tau)$ и $a\Delta(\tau)\cap\cap\, b\Delta(\tau)=p\Delta(\tau)$.

Рассмотрим правый $\Delta(\tau)$-модуль $(a\,b):0$. Так как $a\Delta(\tau)\cap b\Delta(\tau)==p\Delta(\tau)$ — главный правый идеал, то этот модуль циклический. Тогда матрица T из леммы 1 будет иметь вид

$$T=\begin{pmatrix} y\,r & y\,s \\ v\,r & v\,s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}(r\,s), \tag{10}$$

где $\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$ — базисный элемент правого $\Delta(\tau)$-модуля $(a\,b):0$. Так как $T^2==T$, то

$$\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}(r\,s)\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}(r\,s)=\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}(r\,s). \tag{11}$$

На основании (11),

$$(r\,s)\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}=\partial_0. \tag{12}$$

Действительно, если $(r\,s)\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}=\partial_0$, то имеет место равенство: $yar==yr$. Так как в $\Delta(\tau)$ нет делителей нуля, то $a=\partial_0$.

Матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ r & s \end{pmatrix}$, где $r,\,s$ взяты из (12), уже является искомым дополнением.

Действительно, рассмотрим произведение

$$\begin{pmatrix} a & b \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & y \\ d & v \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ взято из (2) а $\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$ — из (10).

Если $(r,\,s)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}=z$, то в качестве правой обратной для матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ r & s \end{pmatrix}$ можно взять

$$\begin{pmatrix} c-yz & y \\ d-vz & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$$

так как

$$\begin{pmatrix} a & b \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \partial_0 & 0 \\ 0 & \partial_0 \end{pmatrix}.$$

Так как $\Delta(\tau)$ может быть вложено в тело*, то из существования правой обратной для матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ r & s \end{pmatrix}$ следует существование для нее левой обратной, т. е. $\begin{pmatrix} a & b \\ r & s \end{pmatrix}$ обратима.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 1′. *Для того чтобы матрица* $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, *для которой выполняется соотношение* $(c\,d)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \partial_0$, *могла быть дополнена до обратимой, необходимо и достаточно, чтобы пересечение* $\Delta(\tau)a \cap \Delta(\tau)b$ *было главным левым идеалом.*

Следствие 1. Если $(a\,b)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \partial_0$ и строка $(a\,b)$ может быть дополнена до обратимой матрицы, то столбец $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ может также быть дополнен до обратимой матрицы и эти дополнения взаимообратны

Доказательство.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ z - za & s - zb \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & y \\ d & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_0 & 0 \\ 0 & \partial_0 \end{pmatrix},$$

т. е. $\begin{pmatrix} c & y \\ d & v \end{pmatrix}$ — обратима (см. конец доказательства теоремы 1).

Очевидно, это предложение имеет место, если слова «строка», «столбец» и соответствующие им обозначения поменять местами.

Следствие 2. В кольце $\Delta(\tau)$ вышеуказанное дополнение строки (столбца) до обратимой матрицы не всегда возможно, как это следует из теоремы 1(1′) и примера 2 из [3], стр. 33.

Теорема об элементарных делителях. Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. *Для любой матрицы* $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *ранга 2 существует строка* $(\alpha\partial_0\,\beta\partial_0)$ *такая, что*

$$(\alpha\partial_0\,\beta\partial_0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \partial_0,$$

где $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ — *некоторый столбец.*

Доказательство. Известно**, что существует такая матрица D порядка и ранга 2, что имеет место соотношение

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} D = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Так как в кольце $\Delta(\tau)$ для любых α_1 и a_2 существуют такие $b_1 \neq 0$ и $b_2 \neq 0$, что $a_1 b_1 = a_2 b_2$, то, умножая справа соотношение (14) на матрицу $\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ и полагая $D \cdot \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} = C$, получаем

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}. \tag{15}$$

---

* См. [2], стр. 101.

** См. [1], стр. 280.

Умножая (15) справа на матрицу $\begin{pmatrix} \partial_0 & 0 \\ 0 & \varphi\partial_0 \end{pmatrix}$, где $\varphi \in \tau$ и $(a\varphi) \in \tau$, $(a\varphi) \neq 0$, получаем

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} \partial_0 & 0 \\ 0 & \varphi\partial_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a(\varphi\partial_0) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Умножив (16) на $\begin{pmatrix} \partial_0 \\ \partial_0 \end{pmatrix}$ справа, получим.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a(\varphi\partial_0) \end{pmatrix}.$$

Так как $a(\varphi\partial_0) = \varphi a + (a\varphi)\partial_0$, где $(a\varphi) \in \tau$, то, полагая $(\alpha\partial_0\beta\partial_0) = (-(a\varphi\partial_0)^{-1}\varphi\,(a\varphi\partial_0)^{-1})$, $(a\varphi) \neq 0$, получаем $(\alpha\partial_0\,\beta\partial_0)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \partial_0$, что и требовалось доказать.

Заметим, что строка $(\alpha\partial_0\,\beta\partial_0)$ на основании теоремы 1 может быть дополнена до обратимой матрицы.

Лемма 3. *Пусть a, $r \in \Delta(\tau)$, $\varphi \in \tau$, тогда пересечение $a\Delta(\tau) \cap \varphi ar\Delta(\tau)$ — главный идеал.*

Доказательство. Если один из элементов a, r, φ равен нулю, или же φ перестановочно с a или с ar, — все доказано.

Пусть a, r, φ отличны от нуля и

$$\varphi ar = ar(\varphi\partial_0) - (ar\varphi)\partial_0, \ (ar\varphi) \in \tau, \qquad (ar\varphi) \neq 0,$$

тогда на основании доказательства, приведенного в конце леммы 2, $\partial_0 = (\varphi ar \ \ a)\begin{pmatrix} \gamma\partial_0 \\ d \end{pmatrix}$. Так как столбец $\begin{pmatrix} \gamma\partial_0 \\ d \end{pmatrix}$ может быть дополнен до обратимой матрицы, то на основании следствия 1 строка $(\varphi ar \ \ a)$ может быть также дополнена до обратимой матрицы, а значит, в силу теоремы 1 пересечение $\varphi ar\Delta(\tau) \cap a\Delta(\tau)$ есть главный идеал, что и требовалось доказать.

Следствие 3. Пересечение $a\Delta(\tau) \cap \varphi a\Delta(\tau)$ есть главный идеал.

Действительно, принимая в лемме 3 $r = \partial_0$, получаем утверждение следствия 3.

Лемма 4. *Пусть a, b, $c \in \Delta(\tau)$ $(\neq 0)$.*

Тогда существует такое k, что пересечение $(a - bk)\Delta(\tau) \cap c\Delta(\tau)$ есть главный идеал.

Известно*, что существует такое $\varphi \in \tau$, что

$$\partial_0 = br + \varphi cs. \tag{17}$$

Умножая справа (17) на a, получаем $a = bra + \varphi csa$, т. е. $a - bra$, или $a - bra = \varphi csa$, является правым кратным φc.

Так как на основании леммы 3 $c\Delta(\tau) \cap \varphi csa\Delta(\tau)$ есть главный идеал, то $(a - bra)\Delta(\tau) \cap c\Delta(\tau)$ есть главный идеал, что требовалось доказать.

Лемма 5. *Пусть матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ имеет ранг 2.*

Тогда существуют такие обратимые матрицы P и Q, что имеет место соотношение

$$P\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} \partial_0 & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix}.$$

---

* См. [2], стр. 105.

Доказательство. На основании замечания, приведенного в конце леммы 2, сущестует такая обратимая матрица P_1, что

$$P_1\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

где b_{11}, b_{12} удовлетворяет соотношению $(b_{11}\ \ b_{12})\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \partial_0$. Умножим матрицу $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ справа на обратимую матрицу $Q = \begin{pmatrix} \partial_0 & 0 \\ -k & \partial_0 \end{pmatrix}$, где k взято из леммы 4. Тогда получим

$$P_1\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} b_{11} - b_{12}k & b_{12} \\ b_{21} - b_{22}k & b_{22} \end{pmatrix},$$

где пересечение $(b_{11} - b_{12}k)\,\Delta(\tau) \cap b_{12}\Delta(\tau)$ есть главный идеал.

Так как

$$(b_{11} - b_{12}k\ \ b_{12})\begin{pmatrix} m \\ n + km \end{pmatrix} = \partial_0,$$

то на основании теоремы 1′ и следствия 1 утверждаем, что столбец $\begin{pmatrix} m \\ n + km \end{pmatrix}$ может быть дополнен до обратимой матрицы Q_2. Следовательно, имеет место соотношение

$$P_1\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} Q_1Q_2 = \begin{pmatrix} \partial_0 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Теперь ясно, что существуют такие обратимые матрицы P_2 и Q_3, что, полагая $P = P_1P_2$, $Q = Q_1Q_2Q_3$, имеем

$$P\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} \partial_0 & 0 \\ 0 & l \end{pmatrix},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Пусть дана квадратная матрица A порядка и ранга n. Тогда существуют такие обратимые матрицы P и Q, что имеет место соотношение*

$$PAQ = \begin{pmatrix} \partial_0 & & & 0 \\ & \partial_0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \partial_0 & \\ 0 & & & & l \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Докажем теорему методом индукции.

Рассмотрим подматрицу матрицы A второго порядка ранга 2. Легко видеть, что такая подматрица существует. Без ограничения общности, можно считать, что эта подматрица расположена в верхнем левом углу матрицы A.

Предположим, что теорема верна для матрицы порядка и ранга $n-1$. Умножим матрицу A слева и справа соответственно на обратимые матрицы

$$P_1 = \begin{pmatrix} P & & & 0 \\ & \partial_0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \partial_0 \end{pmatrix}, \qquad Q_1 = \begin{pmatrix} Q & & & 0 \\ & \partial_0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \partial_0 \end{pmatrix},$$

где P и Q взяты из леммы 5.

Тогда получим

$$P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} \partial_0 & 0 & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & l & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Умножая (18) на некоторые обратимые матрицы U и V, получаем

$$UP_1AQV = \begin{pmatrix} \partial_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & C & \\ \cdot & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

где матрица C имеет порядок и ранг $n-1$. Тогда по предположению индукции найдутся такие обратимые матрицы R и S, что

$$\begin{pmatrix} \partial_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & R & \\ \cdot & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} UP_1AQ_1V \begin{pmatrix} \partial_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & S & \\ \cdot & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_0\partial_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \partial_{0l} \end{pmatrix}.$$

Имеет место следующая

Лемма 6. *Пусть дана матрица*

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

имеющая ранг 1.

Тогда существуют такие обратимые матрицы M и N, что

$$MBN = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Рассмотрим левый $\Delta(\tau)$-модуль, порожденный строками матрицы B. Можно предполагать, что первая строка матрицы B отлична от нуля. Тогда на основании одной теоремы* Я. Б. Лопатинского существуют такие $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \tau$, что базисом рассматриваемого $\Delta(\tau)$-модуля является $(b_{11} \dots b_{1n})$, $\alpha_1(b_{11} \dots b_{1n}) + \dots + \alpha_m(b_{m1} \dots b_{mn})$.

Образуем матрицу

$$R_1 = \begin{pmatrix} \partial_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \alpha_1\partial_0 & \alpha_2\partial_0 & \dots & \dots & \alpha_m\partial_0 \\ 0 & 0 & \partial_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \partial_0 \end{pmatrix},$$

* См. [2], стр. 24.

тогда

$$R_1B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b'_{21} & b'_{22} & \ldots & b'_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix},$$

где $(b'_{21}b'_{22}\ldots b'_{2n})=\alpha_1(b_{11}\ldots b_{1n})+\ldots+\alpha_m(b_{m1}\ldots b_{mn})$.

Так как первые две строчки матрицы R_1B образуют базис рассматриваемого $\Delta(\tau)$-модуля, то, вычитая последовательно от остальных $m-2$ строчек линейные комбинации двух первых, можно сделать их нулевыми, а это равносильно существованию такой обратимой матрицы R_2, что $M=R_1R_2$ и

$$MB=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b'_{21} & b'_{22} & \ldots & b'_{2n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассуждая аналогично, можно показать существование такой обратимой матрицы N, что

$$MBN=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 3. *Для любой матрицы*

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (a_{ij}\in\Delta(\tau))$$

ранга $r\geqslant 2$ *существуют такие обратимые матрицы* P и Q *над* $\Delta(\tau)$, *что имеет место соотношение*

$$PAQ=\left[\begin{array}{cccccccccc} \partial_0 & & & & & & 0 & & & \\ & \partial_0 & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ 0 & & & \partial_0 & & & & & & \\ 0 & \ldots & & 0 & a & b & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & \ldots & & 0 & c & d & 0 & \ldots & & 0 \\ \hline 0 & \ldots & & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & & 0 \end{array}\right],$$

что и требовалось доказать.

Доказательство. Рассмотрим подматрицу матрицы A ранга и порядка r. Применяя к ней теорему 2, получаем

$$\begin{pmatrix} P_r\,\partial_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \partial_0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} Q_r\,\partial_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \partial_0 \end{pmatrix} = \left|\begin{matrix} \partial_0\,\partial_0 & 0 & a_{1r} & \ldots & a_{1n} \\ & \ddots & & \ldots & \\ 0 & & \partial_0 & & \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & \ldots & a_{rn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mr} & \ldots & a_{mn} \end{matrix}\right|.$$

Умножая последнее соотношение на некоторые обратимые матрицы и применяя лемму 6, получаем утверждение теоремы, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Б. Лопатинский, Некоторые свойства линейных дифференциальных операторов, Матем. сб., т. 17 (59), вып. 2, 267—287.

2. Я. Б. Лопатинський, Про деякі властивості кільця диференціальних операторів, Наук. зап. ЛДУ, сер. фіз-матем., т. 5, вип. 2, 1947, 101—107.

3. E. Noether und W. Schmeidler, Moduln in nichtkommutativen Bereichen insbesondere aus Differential und Differenzenausdrucken, Math. z., b. 8, 1920, 1—35.

Поступила 17.II 1961 г.
Львов

Theorem on elementary divisors for a ring of differential operators

P. S. Kazimirsky

Summary

This paper presents the proof of the following theorem:

For any matrix with elements of a differential ring $\Delta(\tau)$ from n differentiations there exist such reversible over $\Delta(\tau)$ matrices P and Q for which relationship (1) holds.

If the matrix A is of quadratic order and rank n then (1) has the form of (2).