Многомерная локальная предельная теорема для плотностей

X. Хекендорф

А. Рассмотрим последовательность независимых s-мерных случайных векторов $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots$ с одной и той же функцией распределения $F(\mathfrak{x}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_s)$. Целью первой части этой заметки является установление локальной предельной теоремы для сумм

$$\mathfrak{z}_n = \frac{1}{B_n}\sum_{r=1}^{n} \mathfrak{x}_r - \mathfrak{a}_n, \tag{1}$$

где $B_n > 0$ — постоянная, а $\mathfrak{a}_n = (a_1^{(n)}, \ a_2^{(n)}, \ldots, a_s^{(n)})$ — постоянный вектор.

Обозначим через $p_n(\mathfrak{x}) = p_n(x_1, \ x_2, \ldots, x_s)$ плотность распределения $\mathfrak{z}_n$ (если последняя существует), через $f(t) = f(t_1, \ t_2, \ldots, t_s)$ — характеристическую функцию $\mathfrak{x}_r$, а через $\psi_n(t) = \psi_n(t_1, \ t_2, \ldots, t_s)$— характеристическую функцию $\mathfrak{z}_n$. Очевидно, имеет место соотношение

$$\psi_n(\mathfrak{t}) = e^{-i(\mathfrak{t}, \mathfrak{a}_n)}\left[f\left(\frac{\mathfrak{t}}{B_n}\right)\right]^n. \tag{2}$$

Пусть $\varphi(\mathfrak{t}) = \varphi(t_1, \ t_2, \ldots, t_s)$ — характеристическая функция предельного устойчивого распределения $\Phi(\mathfrak{x}) = \Phi(x_1, \ x_2, \ldots, x_s)$ с плотностью распределения $\varrho(\mathfrak{x}) = \varrho(x_1, \ x_2, \ldots, x_s)$.

Если случайные величины $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots$ имеют плотность $p(\mathfrak{x}) = p(x_1, x_2, \ldots, x_s)$, тогда справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы равномерно относительно совокупности переменных,*

$$|p_n(\mathfrak{x}) - \varrho(\mathfrak{x})| \to 0$$

необходимо и достаточно выполнение условий:

1) $F(\mathfrak{x})$ *принадлежит области притяжения* $\Phi(\mathfrak{x})$;

2) *Существует* n_0 *такое, что плотность* $p_{n_0}(\mathfrak{x})$ *ограничена*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство теоремы 1 вполне аналогично доказательству соответствующей одномерной теоремы (Б. В. Гнеденко [1, 2]) и основывается на одном свойстве устойчивых распределений, которое в многомерном случае показали Фельдхейм и Леви. Следует лишь заметить, что переход к сферическим координатам упрощает вычисления при доказательстве.

Б. Пусть теперь $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных векторов, имеющих плотности. Пусть $\mathfrak{x}_r = (\xi_1^{(r)}, \ \xi_2^{(r)}, \ldots, \xi_s^{(r)})$.

Относительно распределения этих векторов предполагаем, что существуют конечные моменты порядка $k \geqslant 3$.

Без ограничения общности можно считать, что первые моменты равняются нулю.

Пусть

$$M\xi_i^{(r)}\xi_j^{(r)} = \mu_{ij}^{(r)}, \qquad i,\ j = 1,2,\ldots,s, \tag{3}$$

— вторые моменты вектора $\mathfrak{x}_r$. Положим

$$\mu_{ijn} = \sum_{r=1}^{n} \mu_{ij}^{(r)}, \quad i,\ j = 1,2,\ldots,s; \quad i \neq j,$$

$$s_{in}^2 = \sum_{r=1}^{n} \mu_{ii}^{(r)}, \quad i = 1,2,\ldots,s. \tag{4}$$

Относительно моментов предполагаем

$$\sum_{r=1}^{n} \mu_{ij}^{(r)} \leqslant ng_{ij} \quad (i \neq j) \quad s_{in}^2 \geqslant ng_i,$$

$$\sum_{r=1}^{n} \beta_{l_1 l_2 \ldots l_s}^{(r)} \leqslant nG,\ l_1 + l_2 + \ldots + l_s = k, \tag{5}$$

где G— одна и та же постоянная для всех абсолютных моментов $\beta_{l_1 l_2 \ldots l_s}$ порядка k.

Обозначим через $f_r(\mathfrak{t}) = f_r(t_1,\ t_2,\ldots,t_s)$ характеристическую функцию $\mathfrak{x}_r$, а через $\psi_n(\mathfrak{t}) = \psi_n(t_1,\ t_2,\ldots,t_s)$— характеристическую функцию вектора

$$\mathfrak{z}_n = \left(\frac{1}{s_{1n}}\sum_{r=1}^{n}\xi_1^{(r)},\quad \frac{1}{s_{2n}}\sum_{r=1}^{n}\xi_2^{(r)},\ldots,\frac{1}{s_{sn}}\sum_{r=1}^{n}\xi_s^{(r)}\right). \tag{6}$$

Пусть случайный вектор $\mathfrak{z}_n$ имеет для $n \geqslant n_0$ ограниченную плотность $p_n(\mathfrak{x}) = p_n(x_1,\ x_2,\ldots,x_s)$.

Теорема 2. *Если при некотором постоянном* $\varepsilon \left(0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2\sqrt{s}G^{\frac{1}{k}}}\right)$

$$\int\cdots\int\limits_{|\mathfrak{t}| > \varepsilon n^{-\frac{1}{3}}} \prod_{r=1}^{n} |f_r(\mathfrak{t})|\, d\mathfrak{t} = O\left(\frac{1}{n^{\frac{k-2+s}{2}}}\right), \tag{7}$$

то при $n \geqslant 2n_0$

$$p_n(\mathfrak{x}) = \varphi(\mathfrak{x}) + \sum_{\nu=1}^{k-3}\frac{P_{\nu n}(-\varphi)}{n^{\frac{\nu}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{k-2}{2}}}\right), \tag{8}$$

где $P_{\nu n}$ — *полиномы, определение которых будет дано в следующей ниже лемме, а* $\varphi(\mathfrak{x}) = \varphi(x_1,\ x_2,\ldots,x_s)$ — *плотность s-мерного нормального распределения с дисперсионной матрицей* $\mathfrak{D}$, *в которой элементы главной диагонали равны единице, а остальные равны* $\dfrac{\mu_{ijn}}{s_{in}s_{jn}}$, $i,\ j = 1,2,\ldots,s,\quad i \neq j$.

Доказательство этой теоремы опирается на лемму, являющуюся многомерным обобщением одной леммы Крамера [3] в несколько измененном виде.

Обозначим через $\mathfrak{B}$ область s-мерного эвклидова пространства, определенную неравенством

$$\sum_{\substack{l_1, l_2, \ldots, l_s=0 \\ l_1+l_2+\ldots+l_s=k}}^{k} \frac{k!}{l_1! l_2! \ldots l_s!} \left(\sum_{r=1}^{n} \beta_{l_1 l_2 \ldots l_s}^{(r)} \right) \left| \frac{t_1}{s_{1n}} \right|^{l_1} \left| \frac{t_2}{s_{2n}} \right|^{l_2} \times$$

$$\times \ldots \left| \frac{t_s}{s_{sn}} \right|^{l_s} \leqslant \frac{1}{4^{\frac{k}{3}} n^{\frac{k-3}{3}}}.$$

Пользуясь условием (5), получаем область $\widetilde{\mathfrak{B}}$, которая содержится в $\mathfrak{B}$ и определяется условием

$$|\widetilde{\mathfrak{t}}| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{s} G^{\frac{1}{k}} n^{\frac{1}{3}}}, \quad \widetilde{\mathfrak{t}} = \left(\frac{t_1}{s_{1n}}, \frac{t_2}{s_{2n}}, \ldots, \frac{t_s}{s_{sn}} \right).$$

Лемма. *В области $\mathfrak{B}$ имеет место разложение*

$$e^{\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{s} \frac{\mu_{ijn}}{s_{in} s_{jn}} t_i t_j} \psi_n(\mathfrak{t}) = 1 + \sum_{\nu=1}^{k-3} P_{\nu n}(it_1, it_2, \ldots, it_s) \frac{1}{n^{\frac{\nu}{2}}} + R, \tag{9}$$

где $P_{\nu n}$ — полиномы степени 3ν, коэффициенты которых определяются из соотношения

$$\exp \left\{ \sum_{\nu=1}^{k-3} \left[\sum_{\substack{l_1, l_2, \ldots, l_s=0 \\ l_1+l_2+\ldots+l_s=\nu+2}}^{\nu+2} \frac{\lambda_{n/l_1 l_2 \ldots l_s}}{l_1! l_2! \ldots l_s!} (it_1)^{l_1} (it_2)^{l_2} \ldots (it_s)^{l_s} \right] \left(\frac{z}{\sqrt{n}} \right)^{\nu} \right\} =$$

$$= 1 + \sum_{\nu=1}^{k-3} P_{\nu n}(it_1, it_2, \ldots, it_s) \left(\frac{z}{\sqrt{n}} \right)^{\nu} + R(z), \tag{10}$$

а остаточный член R имеет вид

$$R = \theta_k \cdot \frac{1}{n^{\frac{k-2}{2}}} (|\mathfrak{t}|^k + |\mathfrak{t}|^{3(k-2)}),$$

причем $|\theta_k| \leqslant A_k$, A_k — постоянная, зависящая только от k.

Доказательство. Образуем из последовательности $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots$ последовательность одномерных случайных величин $U_1, U_2, \ldots$, где

$$U_r = (\mathfrak{t}, \overline{\mathfrak{x}}_r) = \sum_{j=1}^{s} \frac{1}{s_{jn}} \xi_j^{(r)} t_j,$$

$\mathfrak{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_s)$ — вспомогательный вектор.

Положим

$$V_n = \sum_{r=1}^{n} U_r = (\mathfrak{t},\ \mathfrak{z}_n).$$

В наших условиях

$$MU_r = 0\,,$$

$$\sigma^2_{u_r} = \sum_{i,j=1}^{s} \frac{\mu_{ij}^{(r)}}{s_{in} s_{jn}} t_i t_j\,,$$

$$s_n^2 = \sigma^2_{U_1} + \sigma^2_{U_2} + \ldots + \sigma^2_{U_n} = \sum_{i,j=1}^{s} \frac{\mu_{ijn}}{s_{in} s_{jn}} t_i t_j\,.$$

Момент порядка l случайной величины U_r имеет вид

$$\sum_{\substack{l_1, l_2, \ldots, l_s = 0 \\ l_1 + l_2 + \ldots + l_s = l}}^{l} \frac{l!}{l_1! l_2! \ldots l_s!} \alpha^{(r)}_{l_1 l_2 \ldots l_s} \left(\frac{t_1}{s_{1n}}\right)^{l_1} \left(\frac{t_2}{s_{2n}}\right)^{l_2} \ldots \left(\frac{t_s}{s_{sn}}\right)^{l_s} (l_1 + l_2 + \ldots + l_s = l)\,.$$

Аналогично вычисляются семиинварианты U_r.

Характеристическая функция U_r будет $f_r\left(\frac{tt_1}{s_{1n}}, \frac{tt_2}{s_{2n}}, \ldots, \frac{tt_s}{s_{sn}}\right)$, характеристическая функция V_n — $\psi_n(tt_1, tt_2, \ldots, tt_s)$.

Если согласно лемме Крамера $\psi_n(tt_1, tt_2, \ldots, tt_s)$ разложить как одномерную характеристическую функцию (по t), а затем положить $t = 1$, то получим разложение для характеристической функции $\psi_n(t_1, t_2, \ldots, t_s)$ от $\mathfrak{z}_n$.

Эта лемма в несколько измененном виде утверждает:

характеристическая функция $\psi_n(t)$ суммы $V_n = \sum_{r=1}^{n} U_r$ для $|t| \leqslant \sqrt[3]{T_{kn}}$,

$$T_{kn} = \frac{\sqrt{n}}{4\varrho_{kn}^{\frac{3}{k}}}, \quad \varrho_{kn} = n^{\frac{k-2}{2}} \sum_{r=1}^{n} M|U_r|^k\,,$$

допускает представление

$$e^{\frac{1}{2}s_n^2 t^2}\psi_n(t) = 1 + \sum_{\nu=1}^{k-3} P_{\nu n}(it)\frac{1}{n^{\frac{\nu}{2}}} + R\,,$$

где $P_{\nu n}$ — полиномы относительно it степени 3ν с коэффициентами, определяющимися по семиинвариантам до порядка $\nu + 2$ из соотношения

$$\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{k-3} \frac{\lambda_{\nu+2,n}(it)^{\nu+2}}{(\nu+2)!}\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}\right\} = 1 + \sum_{\nu=1}^{k-3} P_{\nu n}(it)\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^{\nu} + R(z)\,,$$

причем $\lambda_{\nu n} = n^{\frac{\nu-2}{2}} \sum_{r=1}^{n} \gamma_{\nu r}$, $\gamma_{\nu r}$ — семиинвариант порядка ν случайной величины U_r, а остаточный член R имеет форму

$$R = \theta_k \frac{1}{n^{\frac{k-2}{2}}} \{(\varrho_{kn}^{\frac{1}{k}} |t|)^k + (\varrho_{kn}^{\frac{1}{k}} |t|)^{3(k-2)}\}\,.$$

Для последовательности $U_1, U_2, \ldots$ имеем

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{s}\frac{\mu_{ijn}}{s_{in}s_{jn}}t_i t_j t^2\right\}\psi_n(tt_1,\ tt_2,\ldots,tt_s)=1+\sum_{\nu=1}^{k-3}P_{\nu n}(it)\frac{1}{n^{\frac{\nu}{2}}}+R.$$

Подставив $t=1$, получаем утверждение леммы.

Область $\mathfrak{B}$ определяется из условия $1\leqslant\sqrt[3]{T_{kn}}$ или $1\leqslant T_{kn}$, где

$$T_{kn}=\frac{n^{\frac{3}{k}}}{4n\left[\sum\limits_{r=1}^{n}M\,|U_r|^k\right]^{\frac{3}{k}}}.$$

Поэтому

$$\sum_{r=1}^{n}M\,|U_r|^k\leqslant\frac{1}{4^{\frac{k}{3}}n^{\frac{k-3}{3}}}.$$

По определению U_r это значит, что

$$\sum_{\substack{l_1,l_2,\ldots,l_s=0\\ l_1+l_2+\ldots+l_s=k}}^{k}\frac{k!}{l_1!l_2!\ldots l_s!}\left(\sum_{r=1}^{n}\beta^{(r)}_{l_1l_2\ldots l_s}\right)\left|\frac{t_1}{s_{1n}}\right|^{l_1}\left|\frac{t_2}{s_{2n}}\right|^{l_2}\times\ldots\left|\frac{t_s}{s_{sn}}\right|^{l_s}\leqslant\frac{1}{4^{\frac{k}{3}}n^{\frac{k-3}{3}}}.$$

Определим полиномы $P_{\nu n}(it_1,\ it_2,\ldots,it_s)$. Они получаются из соотношения

$$\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{k-3}\left[\sum_{\substack{l_1,l_2,\ldots,l_s=0\\ l_1+l_2+\ldots+l_s=\nu+2}}^{\nu+2}\frac{\lambda_{n/l_1l_2\ldots l_s}}{l_1!l_2!\ldots l_s!}(it_1)^{l_1}(it_2)^{l_2}\ldots(it_s)^{l_s}\right]\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}\right\}=$$

$$=1+\sum_{\nu=1}^{k-3}P_{\nu n}(it_1,\ it_2,\ldots,it_s)\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}+R(z),$$

где

$$\lambda_{n/l_1l_2\ldots l_s}=\frac{n^{\frac{\nu-2}{2}}\sum\limits_{r=1}^{n}\gamma^{(r)}_{l_1l_2\ldots l_s}}{s_{1n}^{l_1}s_{2n}^{l_2}\ldots s_{sn}^{l_s}},$$

$\gamma^{(r)}_{l_1l_2\ldots l_s}$, $l_1+l_2+\ldots+l_s=\nu$ — семиинвариант $\mathfrak{x}_r$. Согласно этому

$$P_{1n}(it_1,\ it_2,\ldots,it_s)=\sum_{\substack{l_1,l_2,\ldots,l_s=0\\ l_1+l_2+\ldots+l_s=3}}^{3}\frac{\lambda_{n/l_1l_2\ldots l_s}}{l_1!l_2!\ldots l_s!}(it_1)^{l_1}(it_2)^{l_2}\ldots(it_s)^{l_s},$$

$$P_{2n}(it_1,\ it_2, \ldots, it_s) = \sum_{\substack{l_1, l_2, \ldots, l_s = 0 \\ l_1 + l_2 + \ldots + l_s = 4}}^{4} \frac{\lambda_{n/l_1 l_2 \ldots l_s}}{l_1! l_2! \ldots l_s!} (it_1)^{l_1} (it_2)^{l_2} \ldots (it_s)^{l_s} +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\sum_{\substack{l_1, l_2, \ldots, l_s = 0 \\ l_1 + l_2 + \ldots + l_s = 3}}^{3} \frac{\lambda_{n/l_1 l_2 \ldots l_s}}{l_1! l_2! \ldots l_s!} (it_1)^{l_1} (it_2)^{l_2} \ldots (it_s)^{l_s} \right]^2.$$

Вообще $P_{\nu n}(it_1,\ it_2, \ldots,\ it_s)$ — полином степени 3ν относительно $it_1,\ it_2, \ldots,\ it_s$, коэффициенты которого определяются по семиинвариантам $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n$ до порядка $\nu + 2$. Эти коэффициенты, в условиях теоремы 2 ограничены для всех n.

Теперь рассмотрим остаточный член R. В силу условий (5) имеем

$$0 < \varrho_{kn} \leqslant c \left(\sum_{j=1}^{s} |t_j| \right)^k,$$

где $c > 0$ — постоянная. Поэтому

$$R = \theta_k \frac{1}{n^{\frac{k-2}{2}}} (|\mathfrak{t}|^k + |\mathfrak{t}|^{3(k-2)}).$$

Этим лемма полностью доказана.

Изменим полиномы $P_{\nu n}(it_1,\ it_2, \ldots,\ it_s)$ леммы, подставляя везде вместо $(it_1)^{l_1}(it_2)^{l_2} \ldots (it_s)^{l_s}$ выражение

$$\frac{\partial^{l_1 + l_2 + \ldots + l_s} \varphi(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_s)}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \ldots \partial x_s^{l_s}},$$

где

$$\varphi(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_s) = \varphi(\mathfrak{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}} [\det(\mathfrak{D})]^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2} \mathfrak{x} \mathfrak{D}^{-1} \mathfrak{x}'}$$

— плотность нормального распределения с дисперсионной матрицей $\mathfrak{D}$.

Так как

$$\int \ldots \int e^{i \sum\limits_{i,j=1}^{s} x_j t_j} \frac{\partial^{l_1 + l_2 + \ldots + l_s} \varphi(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_s)}{\partial x_1^{l_1} \partial x_2^{l_2} \ldots \partial x_s^{l_s}} dx_1 dx_2 \ldots dx_s =$$

$$= (-it_1)^{l_1} (-it_2)^{l_2} \ldots (-it_s)^{l_s} e^{-\frac{1}{2} \sum\limits_{i,j=1}^{s} \frac{\mu_{ijn}}{s_{in} s_{jn}} t_i t_j}$$

(получается многократным интегрированием по частям), то

$$\int \ldots \int e^{i \sum\limits_{j=1}^{s} x_j t_j} P_{\nu n}(-\varphi)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_s = e^{-\frac{1}{2} \sum\limits_{i,j=1}^{s} \frac{\mu_{ijn}}{s_{in} s_{jn}} t_i t_j} P_{\nu n}(it_1,\ it_2, \ldots,\ it_s).$$

Приступаем к доказательству теоремы 2. В условиях теоремы характеристическая функция $\psi_n(\mathfrak{t})$ вектора $\mathfrak{z}_n$ для достаточно большого n абсолютно интегрируема и

$$p_n(\mathfrak{x})-\varphi(\mathfrak{x})-\sum_{\nu=1}^{k-3}\frac{P_{\nu n}(-\varphi)}{n^{\frac{\nu}{2}}}=\frac{1}{(2\pi)^s}\int\cdots\int e^{-i(\mathfrak{t},\,\mathfrak{x})}[\psi_n(t)-g(t)]\,dt,$$

причем

$$g(\mathfrak{t})=e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{s}\frac{\mu_{ijn}}{s_{in}s_{jn}}t_it_j}\left[1+\sum_{\nu=1}^{k-3}\frac{P_{\nu n}(it_1,it_2,\ldots,it_s)}{n^{\frac{\nu}{2}}}\right].$$

Следует оценить интеграл

$$R_n=\int\cdots\int e^{-i(\mathfrak{t},\,\mathfrak{x})}[\psi_n(\mathfrak{t})-g(\mathfrak{t})]\,d\mathfrak{t}.$$

Разобьем его на три части:

$$R_n=I_1+I_2+I_3,$$

где

$$I_1=\int\underset{\mathfrak{B}}{\cdots}\int e^{-i(\mathfrak{t},\,\mathfrak{x})}[\psi_n(\mathfrak{t})-g(\mathfrak{t})]\,d\mathfrak{t},$$

$$I_2=\int\underset{\overline{\mathfrak{B}}}{\cdots}\int e^{-i(\mathfrak{t},\,\mathfrak{x})}g(\mathfrak{t})\,d\mathfrak{t},$$

$$I_3=\int\underset{\overline{\mathfrak{B}}}{\cdots}\int e^{-i(\mathfrak{t},\,\mathfrak{x})}\psi_n(\mathfrak{t})\,d\mathfrak{t},$$

$$\mathfrak{B}\cup\overline{\mathfrak{B}}=\mathfrak{R}^{(s)}.$$

Используя утверждение леммы, получаем

$$|I_1|\leqslant\theta_k\frac{1}{n^{\frac{k-2}{2}}}\int\underset{\mathfrak{B}}{\cdots}\int(|\mathfrak{t}|^k+|\mathfrak{t}|^{3(k-2)})\,d\mathfrak{t}\leqslant c_1\frac{1}{n^{\frac{k-2}{2}}}.$$

Очевидно, при достаточно больших n

$$|I_2|\leqslant c_2\frac{1}{n^{\frac{k-2}{2}}}.$$

Для оценки I_3 служит условие (7) теоремы. В предположениях теоремы 2

$$\alpha_{1j}\sqrt{n}\leqslant s_{jn}\leqslant\alpha_{2j}\sqrt{n}.$$

Имеем

$$|I_3|\leqslant\int\underset{\widetilde{\overline{\mathfrak{B}}}}{\cdots}\int\prod_{r=1}^{n}\left|f_r\left(\frac{t_1}{s_{1n}},\frac{t_2}{s_{2n}},\ldots,\frac{t_s}{s_{sn}}\right)dt_1dt_2\ldots dt_s=\right.$$

$$=s_{1n}s_{2n}\ldots s_{sn}\int\cdots\int\prod_{r=1}^{n}|f_r(\mathfrak{t})|\,d\mathfrak{t}.$$

$$|\mathfrak{t}|>\frac{1}{2\sqrt{s}\,g^{\frac{1}{k}}}n^{-\frac{1}{3}}.$$

В силу условия (7)

$$|I_3| = O\left(\frac{1}{n^{\frac{k-2}{2}}}\right).$$

Этим теорема 2 доказана.

Пусть $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots$ — теперь последовательность независимых s-мерных случайных векторов с одной и той же функцией распределения $F(\mathfrak{x})$ и плотностью распределения $p(\mathfrak{x})$. Пусть первые моменты равняются нулю. Тогда

$$\mu_{ijn} = n \cdot \mu_{ij},$$

$$s_{in}^2 = n \cdot \mu_{ii};$$

и условия (5) тривиальным образом выполнены.

Выполнение условия (7) теоремы 2 можно доказать с помощью оценок, используемых при доказательстве теоремы 1.

Следующая теорема вытекает из теоремы 2, как следствие.

Теорема 3. *Если существуют моменты порядка $k \geqslant 3$ случайных векторов $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots$ и если случайный вектор*

$$\mathfrak{z}_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n\mu_{11}}} \sum_{r=1}^{n} \xi_1^{(r)}, \ \frac{1}{\sqrt{n\mu_{22}}} \sum_{r=1}^{n} \xi_2^{(r)}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n\mu_{ss}}} \sum_{r=1}^{n} \xi_s^{(r)}\right)$$

для $n = n_0$ имеет ограниченную плотность $p_n(\mathfrak{x})$, то при $n \geqslant 2n_0$

$$p_n(\mathfrak{x}) = \varphi(\mathfrak{x}) + \sum_{\nu=1}^{k-3} \frac{P_\nu(-\varphi)}{n^{\frac{\nu}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{k-2}{2}}}\right),$$

где $\varphi(\mathfrak{x})$ — s-мерное нормальное распределение с дисперсионной матрицей, в которой элементы главной диагонали равны единице, а остальные элементы — выражению $\frac{\mu_{ij}}{\sqrt{\mu_{ii}}\sqrt{\mu_{jj}}}$, $i, j = 1, 2, \ldots, s$, $i \neq j$, P_ν — полиномы, определяющиеся соотношением

$$\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{k-3}\left[\sum_{\substack{l_1, l_2, \ldots, l_s = 0 \\ l_1 + l_2 + \ldots + l_s = \nu+2}}^{\nu+2} \frac{\lambda_{l_1 l_2 \ldots l_s}}{l_1! l_2! \ldots l_s!} (it_1)^{l_1} (it_2)^{l_2} \ldots (it_s)^{l_s}\right]\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^{\nu}\right\} =$$

$$= 1 + \sum_{\nu=1}^{k-3} P_\nu(it_1, it_2, \ldots, it_s)\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^{\nu} + R(z),$$

причем $\lambda_{l_1 l_2 \ldots l_s} = \frac{\gamma_{l_1 l_2 \ldots l_s}}{\sqrt{\mu_{11}}\sqrt{\mu_{22}} \ldots \sqrt{\mu_{ss}}}$, $\gamma_{l_1 l_2 \ldots l_s}$ — семиинвариант $\mathfrak{x}_r$.

Полиномы $P_\nu(it_1, it_2, \ldots, it_s)$ служат для определения $P_\nu(-\varphi)$ так же, как и в предыдущей теореме.

Следует заметить, что $P_\nu(-\varphi)$ не зависят от n.

Автор выражает благодарность проф. И. И. Гихману за оказанное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. B. W. Gnedenko, A. N. Kolmogorov, Grenzverteilungen von Summen unabhängiger Zufallsgrößen, Berlin, 1959.
2. Б. В. Гнеденко, Локальная предельная теорема для плотностей, ДАН СССР, т. 95, 1954.
3. Г. Крамер, Случайные величины и распределения вероятностей, ИЛ, М., 1947.
4. Е. Л. Рвачева, Об областях притяжения многомерных устойчивых распределений, Наук. зап. Львівськ. держ. ун-ту, т. XXIX, № 6, 1954.
5. В. В. Петров, Локальная предельная теорема для плотностей сумм независимых случайных величин, Теория вероятностей и ее применения, № 1, 3, 1956.

Поступила 29.I 1964 г.
Киев — Карл-Маркс-Штадт

Mehrdimensionaler Grenzwertsatz für Wahrscheinlichkeitsdichten

Hartmut Heckendorff

Zusammenfassung

Im ersten Teil vorliegender Arbeit werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben daß die Dichten der normierten Summen unabhängiger identisch verteilter s-dimenensionaler Zufallsvektoren gegen eine stabile Verteilunsdichte konvergieren.

Der zweite Teil enthält eine asymptotische Zerlegung der Differenz der Dichte der normierten Summe von n s-dimensionalen unabhängigen Zufallsvektoren (sowohl nicht identisch als auch identisch verteilter) und der Dichte der s-dimensionalen Normalverteilung nach Potenzen von $\frac{1}{\sqrt{n}}$.