Замечание о стационарных потоках однородных событий

П. И. Васильев, И. Н. Коваленко

После трудов А. Я. Хинчина по теории массового обслуживания [1] появилось большое число работ, посвященных логическому завершению созданной Хинчиным теории стационарных потоков однородных событий. Настоящая заметка также примыкает к этому кругу работ. В ней указывается пример стационарного потока однородных событий с положительными расстояниями, который является одновременно ординарным и нефинитным. Вопрос о существовании подобных потоков до последнего времени оставался открытым; в практических примерах стационарных потоков с положительными расстояниями свойства ординарности и финитности, как правило, одновременно либо выполняются, либо не выполняются.

Пусть

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x < 2, \\ \dfrac{c}{x^2 \ln x}, & \text{если} \quad x \geqslant 2, \end{cases} \tag{1}$$

и пусть $X(t)$ — пуассоновский поток однородных событий со случайным параметром, обладающим плотностью вида (1). Покажем, что $X(t)$ удовлетворяет всем требуемым свойствам.

Стационарность $X(t)$ и положительность расстояний между событиями этого потока непосредственно очевидны.

Параметр потока $X(t)$ составляет, с точностью до постоянного множителя,

$$\lambda = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_2^\infty \frac{1-e^{-xt}}{x^2 \ln x}\, dx \geqslant \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \int_2^A \frac{1-e^{-xt}}{x^2 \ln x} = \int_2^A \frac{dx}{x \ln x} = \ln \left\{ \frac{\ln A}{\ln 2} \right\}.$$

Устремив A к ∞, найдем, что $\lambda = \infty$, т. е. поток $X(t)$ не финитный.

Далее, вероятность появления по меньшей мере двух событий потока в интервале времени длительности t равна, с точностью до постоянного множителя,

$$\int_2^\infty \frac{1-e^{-xt}(1+xt)}{x^2 \ln x}\, dx = \int_2^{\left[t \ln \ln \frac{1}{t}\right]^{-1}} \frac{1-e^{-xt}(1+xt)}{x^2 \ln x}\, dx + {}$$

$$+ \int_{\left[t \ln \ln \frac{1}{t}\right]^{-1}}^\infty \frac{1-e^{-xt}(1+xt)}{x^2 \ln x}\, dx \equiv \alpha(t).$$

Применив в качестве верхней оценки подынтегральной функции в первом слагаемом $t^2/2$, а во втором —

$$\frac{1}{x^2 \ln\left\{\left(t \ln \ln \frac{1}{t}\right)^{-1}\right\}},$$

придем к следующей оценке:

$$\alpha(t) < \frac{t}{2 \ln \ln \frac{1}{t}} + \frac{t \ln \ln \frac{1}{t}}{\ln \frac{1}{t} - \ln \ln \ln \frac{1}{t}} = o(t) \quad (t \to 0),$$

что доказывает ординарность потока $X(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Я. Хинчин, Работы по математической теории массового обслуживания, Физматгиз, М., 1963 г.

Поступила 13.II 1964 г.
Москва