Об одном методе решения краевой задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка

И. Ф. Греджук

В данной статье рассматривается способ нахождения верхних и нижних приближений к решению краевой задачи для линейного дифференциального уравнения второго порядка.

Рассмотрим краевую задачу

$$y'' - Q(x)\,y = 0, \tag{1}$$

$$y(0) = y_0, \qquad y(l) = y_l, \tag{2}$$

где $Q(x)$ непрерывна и положительна на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$.

Эта задача, как известно, имеет единственное решение на $[0, l]$. Для определенности пусть выполнены условия, обеспечивающие существование положительного решения.

Функцию $z(x)$, удовлетворяющую краевым условиям (2), будем называть верхним приближением к решению краевой задачи (1), (2), если $z(x) \geqslant y(x)$ на отрезке $[0, l]$, и нижним приближением, если $z(x) \leqslant y(x)$ на том же отрезке.

Верхнее и нижнее приближения к решению $y(x)$ задачи (1), (2) ищем в виде многочлена n-й степени

$$z(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}.$$

По этому многочлену образуем дифференциальное уравнение, зависящее от $n + 1$ параметра:

$$z'' - \chi(x, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)\,z = 0, \tag{3}$$

где

$$\chi(x, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) =$$

$$= \frac{n(n-1)a_0 x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_1 x^{n-3} + \ldots + 2a_{n-2}}{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n}.$$

На $z(x)$ и $\chi(x, a_0, \ldots, a_n)$ наложим следующие условия:

$$z(0) = y_0, \qquad z(l) = y_l; \tag{2'}$$

$$\chi(0, a_0, a_1, \ldots, a_n) = Q(0); \tag{4}$$

$$\chi(l, a_0, a_1, \ldots, a_n) = Q(l). \tag{4'}$$

Из этих четырех условий определяем два параметра, а два других выражаем через остальные:

$$a_n = y_0, \qquad a_{n-2} = \frac{Q(0)\, y_0}{2},$$

$$a_0 = \frac{\sum\limits_{i=2}^{n} a_i [2n(i-1) - i(i+1) + 2]\, l^{n-i} - y_l [(n-1)(n-2) - Q(l)\, l^2]}{2(n-1)\, l^n},$$

$$a_1 = \frac{\sum\limits_{i=2}^{n} a_i [-2ni + i(i+1)]\, l^{n-i} + y_l [n(n-1) - Q(l)\, l^2]}{2(n-1)\, l^{n-1}}. \tag{5}$$

Из теоремы сравнения [1] следует, что если выполняется неравенство

$$\chi(x, a_2, a_3, \ldots, a_{n-3}, a_{n-1}) \leqslant Q(x) \tag{6}$$

при условии (2′) для всех значений $x \in [0, l]$ и всех значений параметров из некоторой области, то решение уравнения (3) не меньше решения уравнения (1) при $0 \leqslant x \leqslant l$.

Если вместо неравенства (6) имеет место неравенство

$$\chi(x, a_2, a_3, \ldots, a_{n-3}, a_{n-1}) \geqslant Q(x), \tag{7}$$

то решение уравнения (3) не больше решения (1).

Примечание. Благодаря условиям (2′), (4) и (4′) достигается еще равенство вторых производных решений уравнений (1) и (3) в точках $x = 0$ и $x = l$.

Обозначим через E_1 область изменения $a_i^{(1)}$ $(i = 2, 3, \ldots, n-3, n-1)$, в которой выполняется неравенство (6), а E_2 — область изменения $a_i^{(2)}$ $(i = 2, 3, \ldots, n-3, n-1)$, в которой выполняется неравенство (7).

Возможны два случая: $E_1 \cap E_2 = 0$ и $E_1 \cap E_2 = M \neq 0$. В первом случае существует верхняя u и нижняя v функции, охватывающие решение y, во втором $u = v = y$, так как найдется $a^{(1)} \in M$, что возможно только при

$$\chi(x, a_2, a_3, \ldots, a_{n-3}, a_{n-1}) = Q(x),$$

причем множество M состоит из одной точки.

Если $a_i^{(1)} \in E_1$, а $a_i^{(2)} \in E_2$ $(i = 2, 3, \ldots, n-3, n-1)$, то выбираем $\bar{a}_i^{(1)}$ и $\bar{a}_i^{(2)}$ так, чтобы

$$d = \sqrt{\sum_{i=2}^{n-1}{}' (\bar{a}_i^{(1)} - \bar{a}_i^{(2)})^2} \tag{8}$$

было минимальным. ($'$) означает, что не берется суммирование по $i = n-2$.

Если каким-либо способом определить $\bar{a}_i^{(1)}$ и $\bar{a}_i^{(2)}$ $(i = 2, 3, \ldots, n-3, n-1)$ при выполнении условий (6), (7) и (8), то получим верхнюю и нижнюю функции

$$z(x) = u\left(x, \bar{a}_0^{(1)}, \bar{a}_1^{(1)}, \bar{a}_2^{(1)}, \ldots, \bar{a}_{n-3}^{(1)}, \frac{Q(0)\, y_0}{2}, \bar{a}_{n-1}^{(1)}, y_0\right),$$

$$z(x) = v\left(x, \bar{a}_0^{(2)}, \bar{a}_1^{(2)}, \bar{a}_2^{(2)}, \ldots, \bar{a}_{n-3}^{(2)}, \frac{Q(0)\, y_0}{2}, \bar{a}_{n-1}^{(2)}, y_0\right),$$

удовлетворяющие граничным условиям (2).

В соответствии с условиями (5) неравенство (6) перепишется в виде

$$\frac{\sum\limits_{i=2}^{n-2} a_i (n-i)(n-i-1)\, x^{n-i-2} - Q(x) \sum\limits_{i=2}^{n} a_i\, x^{n-i}}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i\, x^{n-i}} =$$

$$= \left(\sum_{i=2}^{n-1} a_i L_i + \frac{Q(0)\, y_0}{2} L_{n-2} + y_0 L_n - \frac{y_l\,[(n-1)(n-2) - Q(l)\, l^2]}{2(n-1)\, l^n} L_0 + \right.$$

$$\left. + \frac{y_l\,[n(n-1) - Q(l)\, l^2]}{2(n-1)\, l^{n-1}} L_1\right)\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\, x^{n-i}\right)^{-1} \leqslant 0,$$

где $L_i = \dfrac{2n(i-1) - i(i-1) + 2}{2(n-1)\, l^i}\,[n(n-1)\, x^{n-2} - Q(x)\, x^n] + \dfrac{-2ni + i(i+1)}{2(n-1)\, l^{i-l}} \times$ $\times\, [(n-1)(n-2) - Q(x)\, x^{n-1}] + (n-i)(n-i-1)\, x^{n-i-2} - Q(x)\, x^{n-i}$. В силу условий (4), (4′) L_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n)$ делятся на $x(l-x)$. Поэтому получаем

$$\left(\sum_{i=2}^{n-1} a_i\,[Q(x)\, M_i(x) - M_i^*(x)] + \frac{y_0}{x(l-x)}\,[-Q(x)\, N(x) + N''(x)] - \right.$$

$$\left. - \frac{y_l}{x(l-x)}\,[-Q(x)\, R(x) + R''(x)]\right)\left(\sum_{i=2}^{n} a_i\, x^{n-i}\right)^{-1} \leqslant 0. \tag{6′}$$

Здесь

$$M_i(x) = \frac{2n(i-1) - i(i+1) + 2}{2(n-1)\, l^i}\, x^{n-2} - \sum_{k=0}^{i-2} \frac{x^{n-k-3}}{l^{i-k-1}},$$

$$M_i^*(x) = \frac{n\,[2n\,(i-1) - i\,(i+1) + 2]}{2l^i} - (n-i)\,(n-i-1)\sum_{k=0}^{i-2}\frac{x^{n-k-5}}{l^{i-k-1}},$$

(9)

$$N(x) = \left[\frac{n\,(n-3)}{2\,(n-1)\,l^{n-2}}\,x^n + \frac{-n^2+n+2}{2\,(n-1)\,l^{n-3}}\,x^{n-1} + x^2\right]\frac{Q(0)}{2} +$$

$$+\frac{n-2}{2l^n}\,x^n - \frac{n}{2l^{n-1}}\,x^{n-1} + 1,$$

$$R(x) = -\frac{(n-1)\,(n-2) - Q(l)\,l^2}{2\,(n-1)\,l^n}\,x^n + \frac{n\,(n-1) - Q(l)\,l^2}{2\,(n-1)\,l^{n-1}}\,x^{n-1},$$

($''$) обозначает вторую произвольную по x.

Из неравенств (6) и (7) получаем соответственно

$$\sum_{i=2}^{n-1}{}' a_i f_i(x) + f_0(x) \leqslant 0, \tag{10}$$

$$-\sum_{i=2}^{n-1}{}' a_i f_i(x) - f_0(x) \leqslant 0, \tag{11}$$

где

$$f_i(x) = Q(x)\,M_i(x) - M_i^*(x),$$

$$f_0(x) = \frac{y_0}{x\,(l-x)}[-Q(x)\,N(x) + N''(x)] - \frac{y_l}{x\,(l-x)}[-Q(x)\,R(x) + R''(x)].$$

Неравенства (10) и (11) противоположного смысла и линейные относительно a_i.

Разрешим неравенство (10) или (11) относительно a_{n-1}, тогда получим

$$a_{n-1} \leqslant \frac{-\sum\limits_{i=2}^{n-3} a_i f_i(x) - f_0(x)}{f_{n-1}(x)}.$$

При этом, если знаменатель $f_{n-1}(x)$ при некотором значении x обратился бы в нуль, что соответствовало бы параллельности $(n-4)$-мерной плоскости оси a_{n-1}, то при прохождении через нуль знак неравенства изменился бы на противоположный и неравенство (10) или (11) не имело бы решения.

Но при ограничениях, наложенных на $Q(x)$, это невозможно, так как

$$f_{n-1}(x) = Q(x)\left[\frac{n-2}{2l^{n-1}}\,x^{n-2} - \sum_{k=0}^{n-2}\frac{x^{n-k-3}}{l^{n-k-2}}\right] - \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{2l^{n-1}}\,x^{n-4} < 0$$

при

$0 \leqslant x \leqslant l.$

Для нахождения решений неравенств (10) и (11), удовлетворяющих условию (8), поступаем следующим образом: разбиваем отрезок $[0, l]$ на $m \geqslant n-2$ равных частей и вычисляем значения коэффициентов при a_i

и значения свободных членов в каждой точке деления. Тогда каждому из указанных неравенств будет соответствовать система $m+1$ неравенств:

$$\sum_{i=2}^{n-1}{}' a_i f_i(x_j) + f_0(x_j) \leqslant 0 \tag{10'}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m, m+1),$$

$$-\sum_{i=2}^{n-1}{}' a_i f_i(x_j) - f_0(x_j) \leqslant 0. \tag{11'}$$

Для каждого фиксированного $x_j \in [0, l]$ $(j = 1, 2, \ldots, m, m+1)$ неравенство (10′) определяет полупространство $E_1^{(j)}$, содержащее в себе область E_1. Пересечение этих полупространств $\prod_{j=1}^{m+1} E_1^{(j)}$ определяет некоторый выпуклый многогранник P_1, охватывающий область E_1. Если дополнить наше разбиение некоторым новым, то, рассуждая аналогично, получим новый многогранник P_2, и тогда справедливо $P_2 \subseteq P_1$.

Аналогично поступаем при решении неравенства (11′).

На основании работ [2] и [3] можно найти эти многогранники и их вершины:

$$A_k(a_{2k}^{(1)}, \ldots, a_{n-3,\,k}^{(1)}, a_{n-1,\,k}^{(1)}),$$

$$A_l(a_{2l}^{(2)}, \ldots, a_{n-3,\,l}^{(2)}, a_{n-1,\,l}^{(2)}).$$

Выбираем $\widetilde{A}_k$ и $\widetilde{A}_l$ так, чтобы удовлетворялось условие (8).

Если одна из областей — многогранник, то вершины принадлежат ей. Если же граница области криволинейная, то вершины аппроксимирующего многогранника ей не принадлежат. Для того чтобы попасть во внутрь этой области, поступаем следующим образом: определяем $\overline{A}_k(a_{2,k}, \ldots a_{n-3,k}, a_{n-1,k})$ как точку пересечения прямой, проходящей через вершины, удовлетворяющие условию (8), с гиперплоскостью, проведенной через вершины, соседние с выбранной.

ПРИМЕЧАНИЯ

1. Для нахождения верхней и нижней функций необходимо начинать вычисления с многочлена не ниже 4-й степени. В этом случае коэффициент a_3 можно оценить с помощью функции от x, т. е.

$$a_3 \geqslant \sup_{0<x<l} f(x) \quad (10''),$$

$$a_3 \leqslant \inf_{0<x<l} f(x), \tag{11''}$$

где

$$f(x) = \frac{-\dfrac{y_0}{x(l-x)}[-Q(x)N(x) + N''(x)] + \dfrac{y_l}{x(l-x)}[-Q(x)R(x) + R''(x)]}{Q(x)M_3(x) - M_3^*(x)}.$$

2. В случае многочлена пятой степени неравенства (10) и (11) запишутся в виде

$$a_2 f_2(x) + a_4 f_4(x) + f(x) \leqslant 0, \tag{10'''}$$

$$-a_2 f_2(x) - a_4 f_4(x) - f(x) \leqslant 0, \tag{11'''}$$

где

$$f_i(x) = M_i(x)\,Q(x) - M_i^*(x),$$

$$f(x) = \frac{y_0}{x(l-x)}[-N(x)\cdot Q(x) + N''(x)] - \frac{y_l}{x(l-x)}[-R(x)\,Q(x) + R''(x)].$$

Используя результаты работ [2] и [3], решение $(a_2^{(1)}, a_4^{(1)})$, $(a_2^{(2)}, a_4^{(2)})$ этих неравенств находим следующим образом.

Делим отрезок $[0, l]$ пополам. Вычисляем значения $f_2(x)$, $f_4(x)$, $f(x)$ в точках $0,\ \frac{l}{2},\ l$.

Тогда вместо $(10''')$ и $(11''')$ получаем следующие две системы неравенств с двумя неизвестными в каждой:

$$a_2 f_2(x_j) + a_4 f_4(x_j) + f(x_j) \leqslant 0 \tag{10$^{\mathrm{IV}}$}$$

$$(j = 1, 2, 3),$$

$$-a_2 f_2(x_j) - a_4 f_4(x_j) - f(x_j) \leqslant 0. \tag{11$^{\mathrm{IV}}$}$$

В общем случае пары точек $\left(0, \frac{l}{2}\right)$, $\left(\frac{l}{2}, l\right)$, $(0, l)$ определяют узлы для неравенств (10^{IV}) и (11^{IV}).

Пусть узлами системы (10^{IV}) будут пары точек $\left(0, \frac{l}{2}\right)$ и $\left(\frac{l}{2}, l\right)$, а узлом (11^{IV}) — $(0, l)$; $d\left(0, \frac{l}{2}; 0, l\right)$ и $d\left(\frac{l}{2}, l; 0, l\right)$ — расстояния между узлами систем (10^{IV}) и (11^{IV}). Пусть $d\left(0, \frac{l}{2}; 0, l\right) < d\left(\frac{l}{2}, l; 0, l\right)$. Тогда делим отрезок $\left(0, \frac{l}{2}\right)$ точкой $\frac{l}{4}$ и рассматриваем систему неравенств (10^{IV}) и (11^{IV}), определяемую точками $0,\ \frac{l}{4},\ \frac{l}{2}$. Находим узлы полученной системы и сравниваем расстояния между узлами. Допустим, что узлы будут определяться точками $\left(0, \frac{l}{4}\right)$, $\left(\frac{l}{4}, \frac{l}{2}\right)$, а узел $\left(0, \frac{l}{2}\right)$ предыдущей системы не является узлом новой системы. Тогда он не принимается во внимание, и сравниваются расстояния

$$d\left(0, \frac{l}{4}; 0, l\right) \text{ и } d\left(\frac{l}{4}, \frac{l}{2}; 0, l\right).$$

Если окажется, что $d\left(0, \frac{l}{4}, 0, l\right) > d\left(\frac{l}{4}, \frac{l}{2}; 0, l\right)$, то отрезок $\left(\frac{l}{4}, \frac{l}{2}\right)$ делится пополам, рассматривается и решается система неравенств (10^{IV}) и (11^{IV}) с точками $\frac{l}{4},\ \frac{3l}{8},\ \frac{l}{2}$ и т. д.

При каждом шаге мы приближаемся к точкам $(\bar{a}_2^{(1)}, \bar{a}_4^{(1)})$, $(\bar{a}_2^{(2)}, \bar{a}_4^{(2)})$, расстояние между которыми минимальное.

Останавливаясь на i-м шаге, получаем узел (вершину), определяемый точками $\frac{m-1}{2^i}l$, $\frac{m}{2^i}l$, который не принадлежит области E_1. В дальнейшем поступаем следующим образом: находим координаты $\bar{a}_2^{(1)}$, $\bar{a}_4^{(1)}$ как среднее арифметическое между координатами соседних вершин по отношению к данной вершине. При достаточно большом i полученная точка принадлежит области E_1.

3. Указанный в статье метод не требует вывода формул для оценки погрешности и может быть применен для любого вида коэффициента $Q(x)$, в том числе и если функция $Q(x)$ задана в виде таблицы.

Пример.

$$y'' - (1+x)y = 0,$$

$$y(0) = 1, \qquad y(1) = 2.$$

Решение ищем в виде многочлена

$$z(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4.$$

Так как в силу (5)

$$a_4 = 1, \qquad a_2 = 0{,}5, \qquad a_0 = a_3, \qquad a_1 = \frac{1-4a_3}{2},$$

то

$$z(x) = a_3 x^4 + \frac{1-4a_3}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + a_3 x + 1.$$

Неравенство (10) имеет вид

$$a_3(x^3 - 2x - 13) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 \leqslant 0,$$

из которого в силу примечания (1) следует:

$$a_3(x) \geqslant \sup_{0<x<1}\left[-\frac{x^2+3x+4}{2(x^3-2x-13)}\right],$$

$$a_3(x) \leqslant \inf_{0<x<1}\left[-\frac{x^2+3x+4}{2(x^3-2x-13)}\right],$$

$a_3(0) = \frac{2}{13}$, $a_3(1) = \frac{2}{7}$, $a_3'(x) > 0$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$. Для верхней функции $a_3^{(1)} = \frac{2}{7}$, а для нижней — $a_3^{(2)} = \frac{2}{13}$. Верхняя и нижняя функции имеют вид

$$u = \frac{2}{7}x^4 - \frac{1}{14}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{7}x + 1,$$

$$v = \frac{2}{13}x^4 + \frac{5}{26}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{13}x + 1.$$

Наибольшая разность достигается при $x = 0{,}5$:

$$\max(u-v)_{x=0,5} = \frac{15}{364} = 0{,}0412.$$

Если же решение искать в виде

$$z(x) = a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5,$$

то согласно формулам (5), (9), (10) и (11) имеем:

$$a_5 = 1, \quad a_3 = 0{,}5, \quad a_0 = \frac{6a_2 + 12a_4 - 3}{8}, \ a_1 = \frac{7 - 14a_2 - 20a_4}{8}.$$

$$M_2(x) = \frac{3}{4}x^3 - x^2, \qquad M_2^*(x) = 15x - 6,$$

$$M_4(x) = \frac{3}{2}x^3 - x^2 - x - 1, \qquad M_4^*(x) = 30x;$$

$$N(x) = \frac{17}{8}x^5 - \frac{29}{8}x^4 + \frac{x^2}{2} + 1, \qquad N''(x) = \frac{85}{2}x^3 - \frac{87}{2}x^2 + 1,$$

$$R(x) = -\frac{5}{4}x^5 + \frac{9}{4}x^4; \qquad R''(x) = -25x^3 + 27x^2;$$

$$a_2\left(\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - x^2 - 15x + 6\right) + a_4\left(\frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \right.$$

$$\left. - 2x^2 - 32x - 1\right) - \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{8}x^3 + x^2 + 9x - 1 \leqslant 0,$$

$$-a_2\left(\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^3 - x^2 - 15x + 6\right) - a_4\left(\frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \right.$$

$$\left. - 2x^2 - 32x - 1\right) + \frac{3}{8}x^4 - \frac{1}{8}x^3 - x^2 - 9x + 1 \leqslant 0.$$

Решая эти неравенства при условии (8), находим для верхней и нижней функций:

$$\bar{a}_2^{(1)} = 0{,}201205, \qquad \bar{a}_4^{(1)} = 0{,}207229,$$
$$\bar{a}_2^{(2)} = 0{,}217317, \qquad \bar{a}_4^{(2)} = 0{,}193846.$$

Отсюда верхняя и нижняя функции имеют вид:

$$u = 0{,}086747x^5 + 0{,}004819x^4 + 0{,}201205x^3 + 0{,}5x^2 + 0{,}207229x + 1,$$

$$v = 0{,}078757x^5 + 0{,}010030x^4 + 0{,}217317x^3 + 0{,}5x^2 + 0{,}193846x + 1.$$

Наибольшая разность достигается при $x \approx 0{,}52$:

$$\max(u - v)_{x=0,52} = 0{,}004613.$$

Приведенный пример показывает, что при увеличении степени полинома погрешность резко уменьшается.

В заключение статьи пользуюсь случаем выразить благодарность К. В. Задираке за научное руководство при решении настоящей задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. II, ИЛ, М., 1954.

2. С. Н. Черников, Системы линейных неравенств, УМН, т. VIII, № 2(54), 1953.

3. А. Г. Школьник, Линейные неравенства, ДАН СССР, т. LXX, № 2, 1950.

Поступила 18. IX 1963 г.
Киев