О свойствах периодичности событий, представимых в конечных автоматах

Ю. И. Любич

Введение

В заключительном параграфе фундаментальной работы С. К. Клини [1] построен простой пример события, не представимого ни в каком конечном автомате*. Это событие над двоичным алфавитом 0,1 определяется бесконечной двоичной дробью

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k^2}$$

в том смысле, что слова, входящие в состав события, суть последовательные отрезки

$$1,\ 11,\ 110,\ 1100,\ 11001,\ 110010, \ldots$$

этой дроби. В своих рассуждениях Клини опирается на тот элементарный факт, что в автономном конечном автомате рано или поздно устанавливается периодический режим**.

Пример Клини наводит на мысль о том, что события, представимые в конечных автоматах, должны обладать какими-то свойствами периодичности. Настоящая заметка посвящена некоторой реализации этого предположения и основанным на ней приемам построения событий, не представимых в конечных автоматах. На этом пути получаются, в частности, и пример Клини и родственная ему серия примеров, указанная В. М. Глушковым [4].

Устанавливаемые здесь теоремы довольно просты и по крайней мере некоторые из них могут быть доказаны несколькими различными способами. Автор предпочел подход, основанный на аппарате бесконечных деревьев [5] в алгебраической форме ([6], [7]).

§ 1. Теорема Нерода. Свойство периодичности, необходимое и достаточное для представимости события в конечном автомате

Обозначим через $F(X)$ множество всех слов (включая пустое слово e) над фиксированным конечным алфавитом $X\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. По отношению к обычной операции умножения слов $F(X)$ есть (свободная) полугруппа с (присоединенной) единицей e.

Пусть E — произвольное событие над алфавитом X, т. е. произвольное подмножество множества $F(X)$.

Следуя Нероду (но несколько модифицируя его терминологию) [6], введем на $F(X)$ отношение эквивалентности, порождаемое событием E, следующим образом. Будем считать два слова a и b эквивалентными (относительно E) и писать

$$a \sim b\,(E)$$

тогда и только тогда, когда для любого слова c имеет место альтернатива: либо оба слова ac, bc входят в E, либо оба входят в дополнительное событие $\bar{E} = F(X) \setminus E$.

Описанное отношение эквивалентности обладает следующими очевидными свойствами:

---

* Придерживаемся в дальнейшем терминологии Ю. Т. Медведева [2].

** См., например, [3], стр. 41.

1) если $a \sim b(E)$, то либо оба слова a и b входят в E, либо оба входят в $\bar{E}$;

2) если $a \sim b(E)$, то $af \sim bf(E)$ для любого слова f;

3) если $a \sim b(E)$, то $a \sim b(\bar{E})$.

Множество классов слов, эквивалентных относительно события E, обозначим через $\mathfrak{M}_E$.

В силу свойства 1), для каждого класса $K \in \mathfrak{M}_E$ будет либо $K \subset E$, либо $K \subset \bar{E}$. В силу свойства 2), имеет смысл умножение класса $K \in \mathfrak{M}_E$ на слово $a \in F(X)$ справа, причем $Ka \in \mathfrak{M}_E$. Следовательно, имеет смысл умножение любого подмножества $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_E$ на любое событие $U \subset F(X)$ справа, причем $\mathfrak{M}U \subset \mathfrak{M}_E$. Наконец, в силу свойства 3), $\mathfrak{M}_{\bar{E}} = \mathfrak{M}_E$.

Теорема Нерода [5]. *Для того чтобы событие E было представимо в конечном автомате, необходимо и достаточно, чтобы множество классов $\mathfrak{M}_E$ было конечным.*

Опираясь на эту теорему, легко получить некоторое свойство периодичности, характерное для событий, представимых в конечных автоматах. Предварительно условимся в терминологии.

Пусть $f(t)$ — функция натурального аргумента $t = 0, 1, 2 \ldots$, принимающая значения из любого фиксированного множества. Будем называть эту функцию e-периодической [5], если существуют такие натуральные $t^{(0)} \geqslant 0$, $T > 0$ ($t^{(0)}$ — предпериод, T — период), что

$$f(t+T) = f(t)\,(t \geqslant t^{(0)}).$$

Если минимальный предпериод e-периодической функции равен нулю, будем называть ее периодической.

Упомянутую во введении теорему об установлении периодического режима в автономном конечном автомате можно сформулировать следующим образом.

Лемма. *Пусть функция $f(t)$ ($t = 0, 1, 2, \ldots$) со значениями в конечном множестве Δ удовлетворяет уравнению*

$$f(t+1) = \Phi[f(t)] \quad (t \geqslant 0),$$

где $\Phi(f)$ — функция, отображающая Δ в себя. Тогда $f(t)$ является e-периодической.

Доказательство этой леммы элементарно и общеизвестно, и мы не станем его воспроизводить.

Обозначим через $\mathfrak{M}_E(t)(t = 0, 1, 2, \ldots)$ множество тех классов из $\mathfrak{M}_E$, которые порождаются всевозможными словами длины t.

Теорема 1. *Для того чтобы событие E было представимо в конечном автомате, необходимо и достаточно, чтобы функция $\mathfrak{M}_E(t)$ была e-периодической.*

Доказательство. Необходимость. Если событие E представимо в конечном автомате, то, в силу теоремы Нерода, множество значений функции $\mathfrak{M}_E(t)$ конечно. Кроме того, очевидно,

$$\mathfrak{M}_E(t+1) = \mathfrak{M}_E(t)\,X \ (t \geqslant 0).$$

Согласно лемме, $\mathfrak{M}_E(t)$ есть e-периодическая функция.

Достаточность. Если функция $\mathfrak{M}_E(t)$ e-периодическая, то множество всех классов слов, эквивалентных относительно E, есть

$$\bigcup_{t=0}^{t^{(0)}+T-1} \mathfrak{M}_E(t),$$

($t^{(0)}$— предпериод, T — период) и, следовательно, конечно.

§ 2. Некоторые свойства периодичности, необходимые для представимости события в конечном автомате. Примеры событий, не представимых в конечных автоматах

Введем теперь для любого события E функцию $E(t)$, значениями которой являются множества слов, определяемые следующим образом: $a \in E(t)$ тогда и только тогда, когда существует слово a_0 длины t, такое, что $a_0 a \in E$. Таким образом, $E(t)$ есть укороченное на t единиц времени событие E.

Теорема 2. *Если событие E представимо в конечном автомате, то обе функции $E(t)$, $\overline{E}(t)$ являются е-периодическими.*

Доказательство достаточно провести для функции $E(t)$.

Пусть $a \in E(t)$ и пусть a_0 — такое слово длины t, что $a_0 a \in E$. Обозначим класс слова a_0 через K. Тогда

$$K \in \mathfrak{M}_E(t), \quad Ka \in E. \tag{1}$$

Наоборот, если для некоторого слова a существует класс K, удовлетворяющий условиям (1), то в этом классе существует слово a_0 длины t и $a_0 a \in E$. Следовательно, $a \in E(t)$.

Для завершения доказательства остается сослаться на теорему 1.

Следствие. *Пусть*

$$0 \leqslant t_0 < t_1 < t_2 < \ldots \tag{2}$$

— последовательность моментов возможного наступления события E, т. е. последовательность длин всевозможных слов из E.

Если событие E представимо в конечном автомате и если последовательность (2) *бесконечна, то соответствующая ей последовательность задержек*

$$\tau_k = t_{k+1} - t_k$$

*является е-периодической**

Для доказательства заметим, что последовательность (2) совпадает с множеством значений t, удовлетворяющих условию

$$e \in E(t)\,(t \geqslant 0). \tag{3}$$

В силу теоремы 2, функция $E(t)$ при рассматриваемых условиях будет e-периодической. Обозначим ее предпериод через $t^{(0)}$, период — через T.

Если $t \geqslant t^{(0)}$ удовлетворяет условию (3), то и $t + T$ ему удовлетворяет. Если $t \geqslant t^{(0)} + T$ удовлетворяет условию (3), то и $t - T$ ему удовлетворяет.

Пусть $t_k \geqslant t^{(0)}\,(k \geqslant k_0)$. Определим для любого $k \geqslant k_0$ номер $q_k \geqslant 1$ из условия

$$t_{k+q_k} = t_k + T.$$

Легко видеть, что $q_{k+1} = q_k\,(k \geqslant k_0)$, т. е. $q_k \equiv q = \mathrm{const}\;(k \geqslant k_0)$. Действительно, между $t_{k+1+q_{k+1}}$ и t_{k+q_k} не может быть ни одного члена последовательности (2), ибо, вычитая T из такого промежуточного члена, мы получили бы член последовательности (2), лежащий между t_k и t_{k+1}.

Итак

$$t_{k+q} = t_k + T\,(k \geqslant k_0),$$

откуда

$$\tau_{k+q} = \tau_k\;(k \geqslant k_0),$$

что и требовалось доказать.

---

* Т. е. последовательность (2), начиная с некоторого члена, представляет собой объединение конечного числа арифметических прогрессий.

Следствие теоремы 2 показывает, в частности, что, если взять, как это делает В. М. Глушков [4], множества

$$F_{t_0}, F_{t_1}, F_{t_2}, \ldots$$

всех слов длин t_0, t_1, $t_2, \ldots$ соответственно и если при этом последовательность задержек $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ будет неограниченной, то событие

$$E = \bigcup_{k=0}^{\infty} F_{t_k}$$

будет не представимым в конечном автомате. В. М. Глушков получил это заключение из известного критерия Клини [1].

Но мы можем теперь обобщить описанную конструкцию, выбирая любую бесконечную последовательность

$$0 \leqslant t_0 < t_1 < t_2 < \ldots,$$

для которой последовательность задержек не является e-периодической (не обязательно неограниченной), выбирая далее в каждом из множеств F_{t_k} произвольное непустое подмножество Φ_k и полагая

$$E = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Phi_k.$$

Следствие теоремы 2 гарантирует, что полученное таким образом событие будет не представимым в конечном автомате.

Указанный во введении пример Клини мы можем также обобщить. Возьмем любую бесконечную последовательность

$$x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, \tag{4}$$

составленную из символов рассматриваемого алфавита X и образуем событие E из слов

$$e, x_{i_1}, x_{i_1} x_{i_2}, \quad x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}, \ldots \tag{5}$$

Если это событие представимо в конечном автомате, то, согласно теореме 2, функция $E(t)$ будет e-периодической. Следовательно, e-периодической будет и функция

$$E(t-1) \cap X(t \geqslant 1). \tag{6}$$

Но множество (6) состоит из единственного элемента x_{i_t}. Таким образом, последовательность (4) оказывается e-периодической.

Итак, если последовательность (4) не является e-периодической*, то определяемое ею событие (5) будет не представимым в конечном автомате.

Рассмотрим еще более общую конструкцию.

Пусть Φ_k — какое-нибудь непустое множество слов одной и той же длины $\tau_k > 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Положим

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi_1 \Phi_2 \ldots \Phi_k, \tag{7}$$

где умножение понимается в естественном для подмножеств полугруппы смысле. Между прочим, в случае, когда все Φ_k равны,

$$\Phi_k = \Phi \quad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

событие E превращается в итерацию* события Φ.

---

* Для существования таких последовательностей, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы алфавит X содержал более одного символа.

Докажем, что если событие E представимо в конечном автомате, то последовательность

$$\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \ldots \tag{8}$$

будет e-периодической.

Действительно, последовательность моментов возможного наступления события E есть

$$t_k = \sum_{j=1}^{k} \tau_j \quad (k = 1,\ 2,\ 3, \ldots)$$

и соответствующей последовательностью задержек будет

$$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots \tag{9}$$

При сделанном предположении последовательность (9) будет e-периодической:

$$\tau_{k+q} = \tau_k \quad (k \geqslant k_0).$$

Но тогда

$$t_{k+q} = t_k + \tau \quad (k \geqslant k_0),$$

где

$$\tau = \sum_{j=k+1}^{k+q} \tau_j = \sum_{j=k_0+1}^{k_0+q} \tau_j.$$

Далее,

$$\Phi_k = E(t_{k-1}) \cap F_{\tau_k},$$

где F_{τ_k} — множество всех слов длины τ_k. Обозначим по-прежнему через T период функции $E(t)$, через $t^{(0)}$ — ее предпериод и положим

$$s = \frac{T}{d(T, \tau)},$$

где $d(\,,\,)$ означает наибольший общий делитель. Тогда при $k \geqslant k_0$ и $t_{k-1} \geqslant t^{(0)}$ будет

$$\Phi_{k+sq} = E(t_{k+sq-1}) \cap E_{\tau_{k+sq}} = E(t_{k-1} + s\tau) \cap F_{\tau_k} = E(t_{k-1}) \cap F_{\tau_k} = \Phi_k,$$

так как $s\tau$ кратно T. Этим завершается доказательство.

Заканчивая настоящий параграф, отметим, что e-периодичность последовательности (8) не только необходима, но и достаточна для представимости события (7) в конечном автомате**. Это легко вывести, например, из критерия Клини или из доказываемой в следующем параграфе теоремы*** 3.

§ 3. Об обращении теоремы 2

Теорема 2, доказанная в предыдущем параграфе, допускает частичное обращение.

Теорема 3. *Если событие E таково, что обе функции $E(t) \cup e$ и $\overline{E}(t) \cup e$ являются периодическими, то E представимо в конечном автомате.*

Мы получим эту теорему из теоремы 1.

Пусть T — общий период функций $E(t) \cup e$, $\overline{E}(t) \cup e$:

$$E(t+T) \cup e = E(t) \cup e, \quad \overline{E}(t+T) \cup e = \overline{E}(t) \cup e \ (t \geqslant 0).$$

---

* Операции умножения и итерации событий в связи с представлением событий в конечных автоматах были введены Клини [1] (см. также [8, 9]).

** Разумеется, при сохранении первоначальной конструкции множеств Φ_k.

*** Которая, впрочем, также легко получается из критерия Клини.

Возьмем любое слово a длины $t+T\,(t>0)$ и запишем его в виде

$$a = a_0 a',$$

где a_0 — слово длины T. Пусть, например, $a \in E$. Тогда

$$a' \in E(T) \subset E(T) \cup e = E(0) \cup e = E \cup e$$

и так как a' — непустое слово, то $a' \in E$.

Покажем теперь, что всегда $a \sim a'(E)$. Действительно, пусть c — любое слово и пусть для определенности $ac \in E$. Так как $(ac)' = a'c$, то, по доказанному, $a'c \in E$.

Итак,

$$\mathfrak{M}_E(t+T) = \mathfrak{M}_E(t)\,(t>0),$$

и остается сослаться на теорему 1.

К сожалению, условие теоремы 3 нельзя ослабить ни за счет отказа от рассмотрения обеих функций $E(t)$, $\overline{E}(t)$, ни за счет замены требования периодичности требованием e-периодичности. Именно, мы построим сейчас пример не представимого в конечном автомате события E с периодической функцией $E(t)$ и e-периодической функцией $E(t)$.

Пример 1. Возьмем любую бесконечную не e-периодическую последовательность

$$x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots,$$

составленную из символов алфавита X, и рассмотрим событие E, состоящее из слов

$$e, x_{i_1}, x_{i_2}x_{i_1}, x_{i_3}x_{i_2}x_{i_1}, \ldots$$

Событие E не представимо в конечном автомате, так как этим свойством обладает «обращенное» событие (5) (см. [7]). Вместе с тем, очевидно $E(1) = E(0) = E$, так что

$$E(t+1) = E(t) = E\,(t \geqslant 0).$$

Покажем, что $\overline{E}(1) = F(X)$. Это будет означать, что

$$\overline{E}(t+1) = \overline{E}(t) = F(X)(t>0).$$

Пусть a — любое слово и пусть его длина равна l. Выберем символ $x_i \in X$, отличный от $x_{i_{l+1}}$, если $a \in E$, а в остальном произвольный. Тогда $x_i a \in \overline{E}$. Следовательно, $a \in \overline{E}(1)$.

Приведем еще пример представимого в конечном автомате события E, для которого обе функции $E(t) \cup e$, $\overline{E}(t) \cup e$ не являются периодическими (но, конечно, являются e-периодическими). Этот пример означает, что заключение теоремы 2 нельзя усилить.

Пример 2. Пусть U — любое непустое вместе с $\overline{U}$ событие, представимое в конечном автомате. Положим

$$E = xU \cup y\overline{U}.$$

Событие E представимо в конечном автомате [1]. Однако

$$E(1) = U \cup \overline{U} = F(X),$$

и так как, очевидно,

$$\overline{E}(1) = x\overline{U} \cup yU,$$

то и

$$\overline{E}(1) = F(X).$$

Следовательно,

$$E(1) \cup e = F(X) \neq E(0) \cup e = E \cup e$$

и аналогично

$$\overline{E}(1) \cup e \neq \overline{E}(0) \cup e.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. С. К. Клини, Представление событий в нервных сетях и конечных автоматах, Сб. «Автоматы», ИЛ, М., 1956, 15—67.
2. Ю. Т. Медведев, О классе событий, допускающих представление в конечном автомате, там же, стр. 385—401.
3. У. Р. Эшби, Введение в кибернетику, ИЛ, М., 1956.
4. В. М. Глушков, Об одном алгоритме синтеза абстрактных автоматов, Укр. матем. ж., т. XII, № 2, 1960, 147—156.
5. Н. Е. Кобринский, Б. А. Трахтенброт, О построении общей теории логических сетей, Сб. «Логические исследования», Изд-во АН СССР, 1959, 352—377.
6. A. Nerode, Linear automaton transformations, Proc. Am. Math. Soc., v. 9, N 4, 1958, 541—544.
7. M. O. Rabin, D. Scott, Finite automata and their decision problems, IBM J. Res. and. Dev., v. 3, N 2, 1959, 114—125.
8. I. M. Copy, C. Elgot, J. B. Wright, Realization of events by logical nets, J. Ass. Comp. Mach., v. 5, N 2, 1958, 181—196.
9. В. М. Глушков, Некоторые проблемы синтеза цифровых автоматов, Ж. выч. матем. и матем. физ., т. 1, № 3, 1961, 371—411.

Поступила 5.XI 1961 г.
Харьков