Об эквивалентности двух определений конечной кольцевой группы

В. Г. Палюткин

1. В данной заметке дается ответ на поставленный Г. И. Кацем вопрос об эквивалентности определения п. 4.2 [1] кольцевой группы (в конечном случае) и следующего определения*.

Определение. Конечной кольцевой группой назовем систему, образованную стандартной (конечномерной) неймановской алгеброй $\mathfrak{M}$**, изоморфизмом $\Phi : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}$, отображением $A \to A^+$ алгебры $\mathfrak{M}$ на себя и $*$-гомоморфизмом ε алгебры $\mathfrak{M}$ в поле комплексных чисел, удовлетворяющими следующим условиям α) — ξ) (всюду в неоговоренных случаях приняты обозначения статей [1 и 2]):

α) $\Phi(1, 2)[I] = I(1, 2)$;

β) $\Phi(2, 3)\Phi(1, 3) = \Phi(1, 2)\Phi(2, 3)$;

γ) $(\lambda A + \mu B)^+ = \bar{\lambda} A^+ + \bar{\mu} B^+$, $(A^+)^* = (A^*)^+$, $(AB)^+ = A^+B^+$, $(A^+)^+ = A$, $\Phi[A^+] = \widetilde{\Phi[A]^+}$;

δ) $\varepsilon(2)\Phi[A](1, 2) = A(1)$,

$\varepsilon(1)\Phi[A](1, 2) = A(2)$,

$\varepsilon(A^+) = \overline{\varepsilon(A)}$;

---

* Это определение является некоторой специализацией конструкции, изложенной в [3], гл. XI, п. 8.

** $\mathfrak{M}$ можно представлять как прямую сумму матричных алгебр $\mathfrak{M}_i$ над полем комплексных чисел, каждая из которых n-кратна полной алгебре матриц порядка n (при некотором n). $\mathfrak{M}$ пространственно изоморфно своему регулярному представлению.

ξ) Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2 \arrow[d, "d(2,1)"'] & \mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2 \arrow[l, "J_+(1)J_*(1)"'] \\
\mathfrak{M}_2 & \mathfrak{M}_2 \arrow[l, "\varepsilon I(2)"] \arrow[u, "\Phi(1,2)"']
\end{tikzcd},$$

где $d(1, 2)$ — отображение $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2 \to \mathfrak{M}_2$: $A(1)B(2) \to AB(1)$, $J_+(2)$: $A(2) \to A^+(2)$; $J_*(2)$: $A(2) \to A^*(2)$; $\varepsilon I(2)$: $B(2) \to \varepsilon(B) I(2)$; здесь и ниже $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}$ при любом i.

Таким образом, данное определение сводится к замене метрических аксиом определения п. 4.2 [1] условиями δ) и ξ).

Заметим, что в случае обычной группы G гомоморфизмом ε и оператором $d(1, 2)$ являются отображения $f(y) \to f(e)$ и $f(x, y) \to f(y, y)$.

2. Теорема. *Определение п. 4.2 [1] эквивалентно данному определению.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G}$ — кольцевая группа в смысле приведенного определения. Для того чтобы $\mathfrak{G}$ являлась кольцевой группой в смысле определения п. 4.2 [1], достаточно построить на алгебре $\mathfrak{M}$ меру m, удовлетворяющую условиям ξ) и δ) последнего определения.

Заметим прежде всего, что операторы A из $\mathfrak{M}$, ввиду существования гомоморфизма ε, можно представить матрицами вида $A = \left(\begin{array}{c|c} a & \\ \hline & A' \end{array}\right)$, где $a = \varepsilon(A)$.

Пусть δ обозначает оператор из $\mathfrak{M}$ с матрицей $\left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 0 \end{array}\right)$. Тогда, очевидно,

$$\delta^+ = \delta^* = \delta, \quad A \cdot \delta = \varepsilon(A)\delta, \quad \delta(2)\Phi[A](1, 2) = A(1)\delta(2) \tag{1}$$

(см. условие δ) определения п. 1).

Введем теперь так же, как в [1], § 5, оператор V: $A(1)B(2) \to \Phi[B](1, 2)A(2)$, действующий в линейном пространстве $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}$. Докажем следующие ниже равенства a), b), c)

a) $JVJ = V^{-1}$ (J означает $J_+(1)J_*(2)$).

Пусть $\widetilde{d}(1, 2)$ обозначает оператор: $A(1)B(2) \to BA(1)$. Тогда $V[Q(1, 2)] = \widetilde{d}(1, 3)\Phi(3, 2)[Q(1, 2)]$, и при этой записи $VJVJ[Q(1, 2)]$ представится в виде:

$$VJVJ[Q(1, 2)] = \widetilde{d}(1,3)\Phi(3,2)J_+(1)J_*(2)\widetilde{d}(1, 4)\Phi(4, 2)J_+(1)J_*(2)[Q(1, 2)]$$

(пространство $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2$ рассматриваем как вложенное в пространство $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2 \otimes \mathfrak{M}_3 \otimes \mathfrak{M}_4$, т. е. $Q(1, 2)$ отождествляем с $Q(1, 2)I(3)I(4)$).

Правую часть последнего равенства преобразуем, используя равенства $\Phi(4, 2)J_*(2) = J_*(4)J_*(2)\Phi(4, 2)$, $J_+(1)\widetilde{d}(1, 4) = \widetilde{d}(1, 4)J_+(1)J_+(4)$, переставляя коммутирующие операторы и производя необходимые сокращения. В результате получим:

$$VJVJ[Q(1, 2)] = \widetilde{d}(1, 3)\Phi(3, 2)J_*(2)\widetilde{d}(1, 4)J_+(1)J_+(4)J_*(4)J_*(2) \times$$

$$\times \Phi(4, 2)J_+(1)[Q(1, 2)] = \widetilde{d}(1, 3)\widetilde{d}(1, 4)J_+(4)J_*(4)\Phi(3, 2)\Phi(4, 2)[Q(1, 2)].$$

Вследствие равенства $\widetilde{d}(1, 3)\widetilde{d}(1, 4) = \widetilde{d}(1, 3)d(3, 4)$ (выражающего ассоциативность умножения в $\mathfrak{M}$), условий β) и ξ) (с заменой индексов 1, 2, 3 на 4, 3, 2) и условия δ) (с заменой индексов 1, 2 на 3, 2) определения п. 1 имеем:

$$VJVJ\,[Q(1,2)] = \widetilde{d}(1,3)\,d(3,4)\,J_+(4)\,J_*(4)\,\Phi(4,3)\,\Phi(3,2)\,[Q(1,2)] =$$

$$= \widetilde{d}(1,3)\,\varepsilon I(3)\,\Phi(3,2)\,[Q(1,2)] = \widetilde{d}(1,3)\,[Q(1,2)] = Q(1,2).$$

Итак, $VJVJ = I$. Следовательно, $JVJ = V^{-1}$.

$b)$ $\Phi[\delta](1,2)(B^{+*}A)(1) = \Phi[\delta](1,2)\,A(1)\,B(2)$; $A,\ B \in \mathfrak{M}$.

Через L_Q обозначим оператор левого умножения на Q: $L_Q K(1,2) = QK(1,2)$. Используя равенство a) легко проверить, что

$$VL_{C(2)}V^{-1}A(1)\,B(2) = L_{\Phi[C](1,2)}A(1)\,B(2) = \Phi[C](1,2)\,A(1)\,B(2). \qquad (2)$$

С другой стороны, действие оператора в левой части равенства (2) на элемент $A(1)\,B(2)$ при $C = \delta$ можно представить как (см. [1])

$$A(1)\,B(2) \xrightarrow{J_+(1)J_*(2)} A^+(1)\,B^*(2) \xrightarrow{V} \Phi[B^*](1,2)\,A^+(1) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{J_+(1)J_*(2)} [J_+(1)\,J_*(2)\,\Phi[B^*](1,2)]\,A(1) \xrightarrow{L_{\delta(2)}} \delta(2)\,[J_+(1)\,J_*(2),$$

$$\Phi[B^*](1,2)]\,A(1) = [J_+(1)\,J_*(2)\,\delta(2)\,\Phi[B^*](1,2)]\,A(1) =$$

$$= (B^{+*}A)(1)\,\delta(2) \xrightarrow{V} \Phi[\delta](1,2)(B^{+*}A)(1).$$

Равенство b) доказано.

Положим $m(A) = \frac{1}{n}\operatorname{Sp}(A)$ (n — размерность пространства, в котором действуют операторы из $\mathfrak{M}$, $\operatorname{Sp}(A)$ — след оператора A). Имеют место равенства

$c)$ $m(A^+) = \overline{m(A)}$, $\quad m(1)\,m(2)(\Phi[A](1,2)) = m(A)$.

Первое равенство является условием δ) определения 4.2 [1]. Оно очевидно, если принять во внимание, что автоморфизм $A \to \bar{A}^+$ стандартной алгебры $\mathfrak{M}$ является пространственным. Поскольку алгебра, порожденная операторами L_Q ($Q \in \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}$), пространственно изоморфна стандартной алгебре $\mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}$, то равенство (2) при таком изоморфизме переходит в равенство

$$WA(2)\,W^{-1} = \Phi[A](1,2), \qquad (3)$$

где W — некоторый обратимый оператор.

Введем операцию $(A, B) \to A \ast B$, однозначно определенную равенством

$$m(1)\,m(2)(A(1)\,B(2)\,\Phi[T](1,2)) = m((A \ast B)\,T).$$

Из условия β) п. 1 следует, что эта операция ассоциативна (см. [1], стр. 294). Определим на $\mathfrak{M}$ линейный функционал $A \to \widetilde{m}(A)$, задав его на операторах вида AB^* равенством

$$\widetilde{m}(AB^*) = \varepsilon(A \ast B^+).$$

Это определение будет корректно, если при $C = AB^* \varepsilon(A * B^+) = \varepsilon(C * I)$. Последнее следует из равенств (см. b))

$$\frac{1}{n}\varepsilon(AB^* * I) = m(1)\,m(2)[(AB^*)(1)\,\Phi[\delta](1,2)] =$$

$$= m(1)\,m(2)[\Phi[\delta]^+(1,2)\,B^+(1)\,A(2)] = m(1)\,m(2)[\Phi[\delta](1,2)\,A(1)\,B^+(2)] =$$

$$= \frac{1}{n}\varepsilon(A * B^+).$$

Функционал $\widetilde{m}$ унитарно инвариантен. Действительно, если U унитарен и $\in \mathfrak{M}$, то согласно равенству b)

$$\widetilde{m}(UAB^*U^*) = m(1)\,m(2)\,(UA(1)\,(UB)^+(2)\,\Phi[\delta](1,2)) =$$

$$= m(1)\,m(2)\,(\Phi[\delta](1,2)\,((UB)^*UA)(1)) =$$

$$= m(1)\,m(2)\,(\Phi[\delta](1,2)\,(B^*A)(1)) = \widetilde{m}(AB^*).$$

Таким образом, $\widetilde{m}$ — центральный функционал на $\mathfrak{M}$, и, следовательно, существует центральный оператор $S \in \mathfrak{M}$ такой, что

$$\widetilde{m}(A) = m(AS).$$

Покажем, что $S = I$. Действительно, поскольку для любого A, принадлежащего центру $\mathfrak{M}$, V коммутирует с $L_{A(1)I(2)}$, то для таких A оператор W коммутирует с $A(1)\,I(2)$, и согласно (3)

$$m(1)\,(A(1)\,m(2)\,[\Phi[\delta](1,2)]) = m(1)\,m(2)\,(W^{-1}A(1)\,W\delta(2)) = \frac{1}{n}\,m(A).$$

С другой стороны,

$$m(1)\,m(2)\,(A(1)\,\Phi[\delta](1,2)) = m((A * I)\,\delta) = \varepsilon(A * I)\,\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\widetilde{m}(A) = \frac{1}{n}\,m(AS).$$

Поскольку S принадлежит центру, то сравнивая обе части равенства убеждаемся, что $S = I$.

Теперь легко проверить выполнимость условия ξ) определения п. 4.2 [1]. Первое требование этого условия в конечном случае выполнено автоматически, для второго —

$$m(1)\,m(2)\,(A(1)\,C(2)\,\Phi[B^*](1,2)) = m((A * C)\,B^*) = \varepsilon((A * C) * B^+) =$$

$$= \varepsilon(A * (C * B^+)) = m(A\,(C * B^+)^{+*}) = m(A^{+*}\,(C * B^+)) =$$

$$= m(1)\,m(2)\,(C(1)\,B^+(2)\,\Phi[A^{+*}](1,2)) =$$

$$= \overline{m(1)\,m(2)\,(B(1)\,C^+(2)\,\Phi[A^*](1,2))}$$

Итак, мера, удовлетворяющая условиям ξ) и δ) (см. равенство c)) определения п. 4.2 [1], построена. Эта мера единственна. В самом деле, пусть для меры $m'(A) = m(AS')$ ($S' \in$ центру $\mathfrak{M}$) также верно последнее равенство и, следовательно, следующее из него равенство $m'(2)\,[\Phi[\delta](1,2)] = m'(\delta)\,I$. В таком случае для любого $A \in \mathfrak{M}$ в силу b)

$$m(A)\,m'(\delta) = m(1)\,(A(1)\,m'(2)\,[\Phi[\delta](1,2)]) = m(1)\,m(2)\,(A(1)\,S'(2),$$

$$\Phi[\delta](1,2)) = m(1)\,m(2)\,((S'^{+*}A)(1)\,\Phi[\delta](1,2)) = m(S'^{+*}A)\,m(\delta).$$

Следовательно, S' кратен I.

3. Пусть теперь дана (конечная) кольцевая группа $\mathfrak{G}$ в смысле определения п. 4.2 [1]. Покажем, что $\mathfrak{G}$ является кольцевой группой и в смысле приведенного здесь определения.

Определим отображение ε носителя $\mathfrak{M}$ кольцевой группы в комплексные числа, задав его равенством $\varepsilon(A) = \hat{m}(\hat{A})$ ($\hat{A}$ — преобразование Фурье оператора A, m — дуальная мера; см. [1], § 5). Это отображение является $*$-гомоморфизмом. Действительно,

$$\varepsilon(A^*) = \hat{m}(\hat{A}^+) = \overline{\hat{m}(\hat{A})} = \overline{\varepsilon(A)}, \quad \varepsilon(AB) = \hat{m}(\widehat{AB}) =$$

$$= \hat{m}(\hat{A} * \hat{B}) = \hat{m}(\hat{A})\,\hat{m}(\hat{B}) = \varepsilon(A)\,\varepsilon(B).$$

Поскольку носитель $\mathfrak{M}$ группы $\mathfrak{G}$ можно считать порожденным линейными комбинациями коэффициентов Z_{ij} регулярного представления (см. [2], то условия δ) и ξ) определения п. 1 достаточно проверить лишь для операторов Z_{ij}. Из определения операторов Z_{ij} легко заключить, что $\varepsilon(Z_{ij}) = \hat{m}(\hat{Z}_{ij}) = \delta_{ij}$. Кроме того, операторы Z_{ij} удовлетворяют равенствам ([2], равенство (6))

$$Z_{ij}^{+} = Z_{ij}, \;\; \Phi(Z_{ij})(1,2) = \sum_s Z_{1s}(1)\,Z_{sj}(2), \;\; \sum_s Z_{si} Z_{sj}^{*} = \delta_{ij} I.$$

При использовании этих соотношений проверка условий δ) и ξ) не представляет труда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Кац, Кольцевые группы и принцип двойственности, Тр. Моск. матем. об-ва, т. XII, 1963.

2. Г. И. Кац, Представление компактных кольцевых групп, ДАН СССР, т. 145, № 5.

3. А. Картан и Эйленберг, Гомологическая алгебра, ИЛ, 1960.

Поступила 20.VII 1963 г.

Киев