«Тригонометрические» полиномы Чебышева являются также гиперболическими *

Е. Я. Ремез

Широко известна выдающаяся и, можно сказать, неисчерпаемая роль тригонометрических (термин С. Н. Бернштейна [1]) полиномов П. Л. Чебышева $T_n(x) = \cos n \arccos x$ во многих вопросах теории функций, математического анализа, вычислительной математики.

---

* Стимулом к этой небольшой публикации послужила очень сжато изложенная заметка П. Л. Чебышева, на которую автор натолкнулся в Bulletin de la Soc. Math. de France за 1875 год в непосредственном соседстве с обширным мемуаром Жордана

Отмечаемый в данной заметке видоизмененный способ их определения, подобно общеупотребительному классическому (отображенному в указанном их наименовании), также сводится по существу к аналитическому продолжению на всю комплексную плоскость функции, непосредственно определяемой на соответствующей части действительной оси. Притом вывод указываемого здесь определения оказывается особенно простым.

Именно, мы полагаем

$$T_n(x) = \operatorname{ch} n \operatorname{arch} x = y(x), \tag{1}$$

где y и x связаны параметрическими уравнениями

$$y = \operatorname{ch} nt, \quad x = \operatorname{ch} t \ \ (0 \leqslant t < \infty). \tag{2}$$

Обоснование крайне просто:

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2 - 1} &= \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t = e^t, \\ x - \sqrt{x^2 - 1} &= \operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t = e^{-t}, \end{aligned} \tag{3}$$

следовательно,

$$y = \operatorname{ch} nt = \frac{1}{2}(e^{nt} + e^{-nt}) = \frac{1}{2}[(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n], \tag{4}$$

что и совпадает с хорошо известным алгебраическим выражением $T_n(x)$.

В классическом определении аналитическое продолжение $T_n(x) = \cos n \arccos x$ выполняется с отрезка $[-1, +1]$, на котором полином $T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \ldots$ обнаруживает свое основное замечательное экстремальное свойство наименьшего уклонения от нуля [2]. Но и на полупрямой $[1, +\infty)$, с которой осуществляется аналитическое продолжение $T_n(x) = \operatorname{ch} n \operatorname{ar}\operatorname{ch} x$, функция $T_n(x)$ также обнаруживает замечательное экстремальное свойство, могущее служить для ее определения: между всеми полиномами $P_n(x)$—«класса $W_n^{(1)}$»—степени $\leqslant n$ и удовлетворяющими ограничительному условию

$$\|P_n\|_{C_{[-1,+1]}} \equiv \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P_n(x)| \leqslant 1, \tag{5}$$

$T_n(x)$ выделяется характеристическим свойством [3]:

$$T_n(x) \geqslant |P_n(x)| \ \ (P_n \in W_n^{(1)}, x \geqslant 1), \tag{6}$$

где знак равенства при $x > 1$ достигается лишь для $P_n(x) \equiv T_n(x)$.

Отметим, в данной связи, что на основе указанного нами определения получается прозрачная расшифровка и весьма простое доказательство одной теоремы П. Л. Чебышева, опубликованной им в 1875 году в Bull. de la Soc. Math. de France [4] со ссылкой на «способы, изложенные...» в его фундаментальном мемуаре «Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций» [5]:

«Теорема. Если целая функция $f(x)$ степени n, от $x = -l$ до $x = +l$, не выходит из пределов $-L$ и $+L$, а для всех значений x вне

об n-мерной геометрии. Примененное здесь нами, для расшифровки результата Чебышева, гиперболическое представление (1) полиномов $T_n(x)$ должно бы, на наш взгляд, давно войти в общеупотребительный фонд основных сведений о полиномах Чебышева наряду с классическим тригонометрическим. Между тем во всей относящейся сюда литературе (по крайней мере, в известной автору) мы, как общее правило, *не находим* на этот счет никакого упоминания, хотя по чрезвычайной простоте самого факта (1) трудно даже предположить, чтобы он не был никем замечен (в частности, самому автору в устных обсуждениях не раз случалось и ранее этот факт отмечать).

пределов $x=-l$, $x=+l$ величины функции $f(x)$ находятся или лежат вне пределов $-L$ и $+L$, то должно быть

$$\left(\frac{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-l^2}}{\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2-l^2}}\right)^n \geqslant \frac{\sqrt{[f(x)]^2}+\sqrt{[f(x)]^2-L^2}}{\sqrt{[f(x)]^2}-\sqrt{[f(x)]^2-L^2}},$$

где радикалы взяты со знаком $+$».

Доказательство получается почти непосредственно на основе вышесказанного, если, положив $\operatorname{ar ch}\frac{|x|}{l}=t$, $\operatorname{ar ch}\frac{|f(x)|}{L}=u$ $(t, u \geqslant 0)$, заметить, что левая и правая части в неравенстве П. Л. Чебышева равны соответственно e^{2nt} и e^{2u}, причем равенство при $|x| \geqslant l$ между обеими частями, тождественно имеющее место, в силу вышеизложенного, для функции $f(x)=\pm LT_n\left(\frac{x}{l}\right)$ (поскольку для нее $u=nt$), не достигается при $|x|>l$ ни для какого другого полинома $f(x)$ рассматриваемого в теореме класса.

Вообще, особое удобство рассматриваемого «гиперболического» способа определения полиномов $T_n(x)$ при трактовке вопросов, связанных с их поведением за пределами промежутка $-1 \leqslant x \leqslant 1$, представляется само собою понятным.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Бернштейн, О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, Харьков, 1912. Соч., т. I, 1952, 11—104.
2. П. Л. Чебышев, Теория механизмов, известных под названием параллелограммов, Соч., т. II, 1947, 23—51.
3. П. Л. Чебышев, О функциях, мало удаляющихся от нуля при некоторых величинах переменной, Соч., т. III, 1948, 108—127.
4. П. Л. Чебышев, О пределе степени целой функции, которая удовлетворяет известным условиям, Соч., т. III, 1948, 88.
5. П. Л. Чебышев, Соч., т. II, 1947, 151—235.

Поступила 17. IV 1963 г.

Киев