О сопряженных порядках и типах целых функций многих переменных

Л. И. Ронкин

Для характеристики роста целой функции многих переменных ее поведение на бесконечности обычно сравнивается с поведением некоторой специальным образом выбранной функции. В качестве функции сравнения может быть выбрана функция одного переменного, например $e^{\sigma R^{\varrho}}$, где $R = |z_1| + \ldots + |z_n|$ (см. А. А. Темляков [1]). Весьма общие результаты в этом направлении были получены А. А. Гольдбергом [2]. Для более точной характеристики роста следует в качестве функции сравнения взять функцию от нескольких переменных. Для некоторых специальных классов целых функций от нескольких переменных такое сравнение проводилось М. М. Джрбашяном [3] (см. также сноску на стр. 410). В [4 и 5] для функций экспоненциального роста функцией сравнения служила функция

$$e^{\sigma_1|z_n|+\ldots+\sigma_n|z_n|}.$$

При этом рост рассматриваемых целых функций характеризовался некоторой гиперповерхностью, названной гиперповерхностью сопряженных степеней. Такой способ характеристики роста может быть распространен и на случай целых функций произвольного конечного порядка роста, т. е. на функции, удовлетворяющие асимптотическому неравенству*

$$|f(z_1, \ldots, z_n)| < e^{(|z_1| + \ldots + |z_n|)^\varrho}. \qquad (\varrho < \infty).$$

Возникающие при этом гиперповерхности обладают весьма простыми характеристическими свойствами, установлению которых и посвящена эта заметка.

Пусть

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{k_1, \ldots, k_n = 0}^{\infty} a_{k_1, \ldots, k_n} z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n} \qquad (1)$$

— целая функция конечного порядка роста. Обозначим

$$M_f(R_1, \ldots, R_n) = \max_{|z_i| = R_i;\ i = 1, \ldots, n} |f(z_1, \ldots, z_n)|.$$

Сравним рост функции $\ln M_f(R_1, \ldots, R_n)$ с ростом функции $R_1^{a_1} + \ldots + R_n^{a_n}$. Для этого рассмотрим в n-мерном вещественном пространстве множество B_ϱ всех точек $(a_1, \ldots, a_n)$, для которых имеет место асимптотическое неравенство

$$\ln M_f(R_1, \ldots, R_n) < R_1^{a_1} + \ldots + R_n^{a_n}. \qquad (2)$$

Очевидно, что если некоторая точка $(a_1', \ldots, a_n') \in B_\varrho$, то B_ϱ будет принадлежать и весь гипероктант $\{a_i \geqslant a_i';\ i = 1, \ldots, n\}$. Наоборот, если $(a_1' \ldots, \ldots, a_n') \overline{\in} B_\varrho$, то любая точка $(a_1, \ldots, a_n)$ с $a_i \leqslant a_i'$, $i = 1, \ldots, n$, также не принадлежит B_ϱ. Поэтому граничные точки множества B_ϱ образуют некоторую гиперповерхность S_ϱ, делящую все пространство на две части. К одной из них принадлежат точки $(a_1, \ldots, a_n)$, для которых неравенство (2) выполняется, к другой — те точки, для которых это неравенство не имеет места. Тем самым гиперповерхность S_ϱ характеризует рост функции $M_f(R_1, \ldots, R_n)$, а значит, и функции $f(z_1, \ldots, z_n)$. Назовем эту гиперповерхность гиперповерхностью сопряженных порядков, а каждую систему чисел $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ такую, что $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \in S_\varrho$, будем называть системой сопряженных порядков.

Заметим, что условие

$$\overline{\lim_{R_1 + \ldots + R_n \to \infty}} \frac{\ln \ln M_f(R_1, \ldots, R_n)}{\ln (R_1^{\varrho_1} + \ldots + R_n^{\varrho_n})} = 1 \qquad (3)$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы положительные числа $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ образовывали систему сопряженных порядков**.

Для более точной характеристики роста функции $\ln M_f(R_1, \ldots, R_n)$ сравним ее рост с ростом функции $a_1 R_1^{\varrho_1} + \ldots + a_n R_n^{\varrho_n}$, где $(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ — некоторая система сопряженных порядков функции $f(z_1, \ldots, z_n)$. Подобно тому, как это было сделано для сопряженных порядков, обозначим через B_σ мно-

* Неравенство, содержащее некоторые переменные $x_1, \ldots, x_n$, называем асимптотическим, если оно справедливо при условии, что сумма $|x_1| + \ldots + |x_n|$ достаточно велика.

** А. А. Гольдберг [2] называет систему чисел, удовлетворяющих условию (3), системой положительных порядков функции $f(z_1, \ldots, z_n)$.

жество тех точек $(a_1, \ldots, a_n)$, для которых имеет место асимптотическое неравенство

$$\ln M_f(R_1, \ldots, R_n) < a_1 R_1^{\varrho_1} + \ldots + a_n R_n^{\varrho_n}$$

Те же соображения, которые приводились при определении сопряженных порядков, показывают, что гиперповерхность S_σ, являющаяся границей множества B_σ*, характеризует рост функции $f(z_1, \ldots, z_n)$. Назовем S_σ гиперповерхностью сопряженных типов порядка $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$, а каждую систему чисел $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ такую, что $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in S_\sigma$, будем называть системой сопряженных типов порядка $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$. Легко видеть, что положительные числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ тогда и только тогда образуют систему сопряженных типов порядка $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$, когда

$$\overline{\lim_{R_1+\ldots+R_n\to\infty}} \frac{\ln M_f(R_1, \ldots, R_n)}{\sigma_1 R_1^{\varrho_1} + \ldots + \sigma_n R_n^{\varrho_n}} = 1.$$

Связь между сопряженными порядками, типами и коэффициентами степенного разложения функции (1) дается следующими формулами**:

$$\overline{\lim_{k_1+\ldots+k_n\to\infty}} \frac{\left(\frac{k_1}{\varrho_1} + \ldots + \frac{k_n}{\varrho_n}\right) \ln(k_1 + \ldots + k_n)}{-\ln|a_{k_1,\ldots,k_n}|} = 1 \tag{4}$$

$$\overline{\lim_{k_1+\ldots+k_n\to\infty}} \sqrt[k_1+\ldots+k_n]{|a_{k_1,\ldots,k_n}| \left(\frac{k_1}{\sigma_1 e \varrho_1}\right)^{\frac{k_1}{\varrho_1}} \cdots \left(\frac{k_n}{\sigma_n e \varrho_n}\right)^{\frac{k_n}{\varrho_n}}} = 1. \tag{5}$$

При этом в (4) предполагается, что все $\varrho_i > 0$, а в (5) — что и все $\varrho_i > 0$ и все $\sigma_i > 0$. Эти формулы дают возможность установить характеристические свойства гиперповерхностей сопряженных порядков и сопряженных типов.

Действительно, пусть $(\varrho_1', \ldots, \varrho_n') \in \mathring{B}_\varrho$ и $(\varrho_1'', \ldots, \varrho_n'') \in \mathring{B}_\varrho$, где через $\mathring{B}_\varrho$ обозначено множество всех внутренних точек множества B_ϱ. Тогда

$$\overline{\lim_{k_1+\ldots+k_n\to\infty}} \frac{\left(\frac{k_1}{\varrho_1'} + \ldots + \frac{k_n}{\varrho_n'}\right) \ln(k_1 + \ldots + k_n)}{-\ln|a_{k_1,\ldots,k_n}|} < 1,$$

$$\overline{\lim_{k_1+\ldots+k_n\to\infty}} \frac{\left(\frac{k_1}{\varrho_1''} + \ldots + \frac{k_n}{\varrho_n''}\right) \ln(k_1 + \ldots + k_n)}{-\ln|a_{k_1,\ldots,k_n}|} < 1.$$

---

* Нетрудно показать, что множество B_σ выпукло. Мы не останавливаемся на этом, так как далее будет дана более точная характеристика этого множества.

** Для функций, имеющих своими гиперповерхностями сопряженных порядков и типов границы гипероктантов вида $a_i > a_i'$, $i = 1, \ldots, n$, формулы (4) и (5) впервые были получены М. М. Джрбашяном [3], причем формула (4) была получена в несколько ином виде. В общем случае формула (4) была получена А. А. Гольдбергом [2].

Умножая первое неравенство на $\nu > 0$, а второе на $\mu = 1 - \nu > 0$ и складывая их, получаем, что

$$\overline{\lim_{k_1+\ldots+k_n\to\infty}} \left\{ \frac{k_1\left(\frac{\nu}{\varrho_1'}+\frac{\mu}{\varrho_1''}\right)+\ldots+k_n\left(\frac{\nu}{\varrho_n'}+\frac{\mu}{\varrho_n''}\right)}{-\ln|a_{k_1,\ldots,k_n}|} \ln(k_1+\ldots+k_n) \right\} < 1.$$

Это означает, что если точки $P(b_1', \ldots, b_n')$ и $P(b_1'', \ldots, b_n'')$ таковы, что $\left(\frac{1}{b_1'}, \ldots, \frac{1}{b_n'}\right) \in \mathring{B}_\varrho$ и $\left(\frac{1}{b_1''}, \ldots, \frac{1}{b_n''}\right) \in \mathring{B}_\varrho$, то любая точка отрезка P_1P_2 обладает тем же свойством, т. е. при любых ν и μ, $\nu > 0$, $\mu > 0$, $\nu + \mu = 1$,

$$\left(\frac{1}{\nu b_1' + \mu b_1''}, \ldots, \frac{1}{\nu b_n' + \mu b_n''}\right) \in \mathring{B}_\varrho.$$

Иными словами, область B_ϱ^{-1}, полученная из области $\mathring{B}_\varrho$ преобразованием $b_i = \frac{1}{a_i}$, $i = 1, \ldots, n$, является выпуклой. Кроме того, она, очевидно, удовлетворяет условию, которое мы обозначим через A: вместе с каждой ее точкой $(b_1', \ldots, b_n')$ в ней содержатся все точки $(b_1, \ldots, b_n)$, для которых $0 < b_i \leqslant b_i'$, $i = 1, \ldots, n$.

Нетрудно убедиться в том, что имеет место и обратное утверждение. Действительно, пусть некоторая гиперповерхность S совместно с координатными плоскостями является границей некоторой выпуклой области D, расположенной в гипероктанте $\{b_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n\}$ и удовлетворяющей условию A. Введем в рассмотрение опорную функцию области D*

$$h_D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sup_{(b_1,\ldots,b_n)\in D} (b_1 \cos\alpha_1 + \ldots + b_n \cos\alpha_n),$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — углы, образованные выбранным лучом с осями координат. Поскольку область D расположена в гипероктанте $\{b_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n\}$ и удовлетворяет условию A, то гиперповерхность S целиком определяется значениями функции $h_D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ при $\alpha_i \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $i = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим функцию

$$f(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{k_1,\ldots,k_n=0}^{\infty} a_{k_1,\ldots,k_n} z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n},$$

коэффициенты которой $a_{k_1,\ldots,k_n}$ определены равенствами

$$a_{k_1,\ldots,k_n} = \exp\{-h_D(\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_n^{(k_n)}) \sqrt{k_1^2+\ldots+k_n^2} \ln(k_1+\ldots+k_n)\},$$

где

$$\alpha_i^{(k_i)} = \arccos \frac{k_i}{\sqrt{k_1^2+\ldots+k_n^2}}.$$

* Об опорных функциях см., например, [6].

Из определения опорной функции следует, что при $(b_1, \ldots, b_n) \in S$

$$\overline{\lim_{k_1+\ldots+k_n\to\infty}} \frac{(k_1b_1+\ldots+k_nb_n)\ln(k_1+\ldots+k_n)}{-\ln|a_{k_1,\ldots,k_n}|} =$$

$$= \overline{\lim_{k_1+\ldots+k_n\to\infty}} \frac{k_1b_1+\ldots+k_nb_n}{h_D(\alpha_1^{(k_1)},\ldots,\alpha_n^{(k_n)})\sqrt{k_1^2+\ldots+k_n^2}} =$$

$$= \overline{\lim_{k_1+\ldots+k_n\to\infty}} \frac{b_1\cos\alpha_1^{(k_1)}+\ldots+b_n\cos\alpha_n^{(k_n)}}{h_D(\alpha_1^{(k_1)},\ldots,\alpha_n^{(k_n)})} \leqslant 1. \tag{6}$$

В то же время, как это следует из свойств выпуклых областей и их опорных функций, для каждой точки $(b_1, \ldots, b_n) \in S$ найдется направление $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ такое, что

$$b_1\cos\alpha_1+\ldots+b_n\cos\alpha_n = h_D(\alpha_1,\ldots,\alpha_n).$$

Выберем из всех систем номеров $(k_1, \ldots, k_n)$ такую их последовательность, чтобы соответствующие $\alpha_i^{(k_i)} \to \alpha_i$, $i = 1, \ldots, n$. Нетрудно показать, что это всегда возможно. Из непрерывности опорной функции следует, что когда $(k_1, \ldots, k_n)$ пробегают выбранную последовательность,

$$\lim \frac{b_1\cos\alpha_1^{(k_1)}+\ldots+b_n\cos\alpha_n^{(k_n)}}{h_D(\alpha_1^{(k_1)},\ldots,\alpha_n^{(k_n)})} = 1.$$

Отсюда и из (6) заключаем, что для рассматриваемой нами функции соотношение

$$\overline{\lim_{k_1+\ldots+k_n\to\infty}} \frac{(k_1b_1+\ldots+k_nb_n)\ln(k_1+\ldots+k_n)}{-\ln|a_{k_1,\ldots,k_n}|} = 1 \tag{7}$$

выполняется, как только $(b_1, \ldots, b_n) \in S$. Сопоставляя (7) с (4), видим, что числа $\frac{1}{b_1}, \ldots, \frac{1}{b_n}$ образуют систему сопряженных порядков, т. е. что гиперповерхность S^{-1}, полученная из гиперповерхности S преобразованием $a_i = \frac{1}{b_i}$, $i = 1, \ldots, n$, является гиперповерхностью сопряженных порядков построенной нами функции.

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть S — некоторая гиперповерхность, расположенная в гипероктанте $\{a_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$. Пусть, далее, S^{-1} — гиперповерхность, полученная из S преобразованием $b_i = \frac{1}{a_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда для того чтобы гиперповерхность S была гиперповерхностью сопряженных порядков хотя бы для одной целой функции $f(z_1, \ldots, z_n)$, необходимо и достаточно, чтобы S^{-1} вместе с координатными плоскостями образовывала границу какой-нибудь выпуклой области, удовлетворяющей условию A.*

Для гиперповерхностей сопряженных типов соответствующая теорема формулируется следующим образом.

Теорема 2. *Пусть S — некоторая гиперповерхность, расположенная в гипероктанте $\{a_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n\}$. Пусть, далее, S_1 — гиперповерхность, получаемая из S преобразованием $b_i = \ln a_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда* *для того чтобы гиперповерхность S была гиперповерхностью сопряженных типов порядка $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ хотя бы для одной целой функции $f(z_1, \ldots, z_n)$, необходимо и достаточно, чтобы гиперповерхность S_1 являлась границей какой-нибудь выпуклой области, содержащей вместе с каждой своей точкой $(a_1', \ldots, a_n')$ весь гипероктант $\{a_i \geqslant a_i',\ i = 1, \ldots, n\}$.*

Доказательство этой теоремы мы опускаем, поскольку оно лишь в деталях отличается от доказательства теоремы 1, а именно — вместо соотношения (4) используется соотношение, получаемое при логарифмировании (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Темляков, Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, тр. кафедр матем., т. 20, 1954.
2. А. А. Гольдберг, Докл. АН Арм. ССР, т. 29, № 4, 1959.
3. М. М. Джрбашян, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-матем., т. 8, № 4, 1955.
4. Л. И. Ронкин, Матем. сб., т. 39 (81): 2, 1956.
5. Л. И. Ронкин, Зап. матем. отд. физ.-матем. фак-та Харьковск. гос. ун-та и Харьковск. матем. об-ва, т. 27, сер. 4, 1961.
6. Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, Гостехиздат, М., 1957.

Поступила 4.V 1961 г.
Харьков