Теорема подобия для поверхностей R_n в римановом пространстве R_m

В. С. Собчук

Пусть R_n — n-мерное риманово пространство с основной квадратичной формой

$$g_{ij}dx^i dx^j \quad (i, j = 1, \ldots, n), \tag{1}$$

вложенное в m-мерное риманово пространство R_m с квадратичной формой

$$a_{\alpha\beta}dy^\alpha dy^\beta \, (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)^*; \tag{2}$$

при этом пространство R_n определяется формулами вида

$$y^\alpha = y^\alpha (x^1, \ldots, x^n), \tag{3}$$

для которых ранг якобиевой матрицы $\left\| \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \right\|$ равен n. Пространство R_n можно рассматривать, конечно, и как n-мерную поверхность в R_m. Как известно, имеют место формулы

$$g_{ij} = a_{\alpha\beta} y_i^\alpha y_j^\beta, \tag{4}$$

где обозначено

$$y_i^\alpha = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}.$$

---

* В дальнейшем греческие буквы принимают значения $1, \ldots, m$, а латинские $1, \ldots, n$, если не оговорено противное.

Если обозначить компоненты взаимно ортогональных друг к другу и нормальных к R_n векторов через $\xi^{\alpha}_{\sigma 1}$ $(\sigma = n+1, \ldots, m)$, символы Кристоффеля первого рода для формы пространства R_m — через $[\mu\nu, \alpha]_a$, а символы Кристоффеля второго рода для R_n — через $\left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_g$, то, как известно [1], для коэффициентов второй основной формы пространства R_n, соответствующей направлению нормали $\xi^{\alpha}_{\sigma 1}$, получим

$$b_{\sigma 1 | ij} = (a_{\alpha\beta} y^{\alpha}_{,ij} + [\mu\nu, \beta]_a y^{\mu}_i y^{\nu}_j)\, \xi^{\beta}_{\sigma 1}, \tag{5}$$

где $y^{\alpha}_{,ij} = y^{\alpha}_{ij} - \left\{ \begin{matrix} k \\ ij \end{matrix} \right\}_g y^{\alpha}_k$ — ковариантная производная относительно формы g, а $y^{\alpha}_{ij} = \dfrac{\partial^2 y^{\alpha}}{\partial x^i \partial x^j}$.

Рассмотрим вектор, нормальный к R_n, компоненты ξ^{α} которого определены равенством

$$\xi^{\alpha} = \sum_{\sigma} a_{\gamma\beta} y^{\gamma} \xi^{\beta}_{\sigma_1} \xi^{\alpha}_{\sigma_1}. \tag{6}$$

Вектор ξ^{α} не зависит от выбора $m-n$ взаимно ортогональных векторов $\xi^{\alpha}_{\sigma 1}$, нормальных к R_n [1].

Для коэффициентов второй основной формы пространства R_n, соответствующей направлению нормали ξ^{α}, имеем

$$b_{ij} = (a_{\alpha\beta} y^{\alpha}_{,ij} + [\mu\nu, \beta]\, y^{\mu}_i y^{\nu}_j)\, \xi^{\beta}. \tag{7}$$

Главные кривизны $k_1, \ldots, k_n$ поверхности R_n для направления нормали ξ^{α} суть собственные значения второй ее формы по отношению к первой, которые, как известно, есть корни уравнения

$$|b_{ij} - k g_{ij}| = 0,$$

т. е. алгебраические функции коэффициентов первой и второй квадратичных форм.

В R_m введем следующую систему координат: за $y^1, \ldots, y^{m-1}$ примем углы, которые образуют геодезические, выходящие из некоторой фиксированной точки O, с некоторыми фиксированными направлениями, а за y^m — длину отрезка геодезической от точки O до точки пространства, координаты которой определяются.

Пусть в R_m заданы две поверхности $\overset{1}{R}_n$ и $\overset{*}{R}_n$ уравнениями

$$y^{\alpha} = y^{\alpha}(x^1, \ldots, x^n), \qquad y^{\alpha} = y^{\alpha}(x^1, \ldots, x^n) \qquad (\alpha = 1, \ldots, m-1),$$

$$y^m = \overset{1}{y}{}^m(x^1, \ldots, x^n); \qquad y^m = \overset{*}{y}{}^m(x^1, \ldots, x^n),$$

причем считаем, что $\overset{1}{y}{}^m - \overset{*}{y}{}^m \geqslant 0$.
Уравнение, «подобное» увеличенной с центром подобия в точке O поверхности $\overset{*}{R}_n$, которую мы обозначим $\overset{0}{R}_n$, имеет вид

$$y^{\alpha} = y^{\alpha}(x^1, \ldots, x^n) \qquad (\alpha = 1, \ldots, m-1),$$

$$y^m = \overset{0}{y}{}^m(x^1, \ldots, x^n) \equiv \overset{*}{y}{}^m(x^1, \ldots, x^n) + c \cdot \overset{*}{y}{}^m(x^1, \ldots, x^n),$$

где c — постоянная.

Зададим выпуклое семейство поверхностей R_n^t, «соединяющее» поверхности R_n^0 и R_n^1, уравнениями

$$\begin{aligned} &y^\alpha = y^\alpha(x^1, \ldots, x^n) \quad (\alpha = 1, \ldots, m-1), \\ &y^m = \overset{0}{y}{}^m(x^1, \ldots, x^n) + w(x^1, \ldots, x^n)\cdot t \quad (0 \leqslant t \leqslant 1), \end{aligned} \tag{8}$$

где обозначено

$$w = \overset{1}{y}{}^m - \overset{0}{y}{}^m, \tag{9}$$

Пусть для поверхностей семейства $\{R_n^t\}$ определена функция

$$\Phi(k_1, \ldots, k_n;\ y_1^1, \ldots, y_1^m; \ldots; y_n^1, \ldots, y_n^m;\ y^1, \ldots, y^m;\ x^1, \ldots, x^n) \equiv$$
$$\equiv \Phi(k_i;\ y_i^\alpha;\ y^\alpha;\ x),$$

где $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n$. Предполагается, что функция Φ обладает свойствами (1) — (4), сформулированными в работе [2]. Требования (1) — (4) в дальнейшем неизменно предполагаются выполненными. Кроме того, считается выполненным условие

$$a_{m\beta}\xi^\beta > a_0 > 0.$$

Введем следующее

Определение. Говорят, что между множествами $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ в R_m установлено центральное соответствие, если соответственными считаются точки множеств $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$, лежащие на геодезических, выходящих из некоторой фиксированной точки O.

Если отрезки геодезических между соответственными точками имеют длины, пропорциональные длинам отрезков от точки O до точек множества $\mathfrak{M}_1$, то центральное соответствие называется подобием.

Теорема. *Пусть в R_m даны две поверхности R_n^1 и R_n^*, между которыми установлено центральное соответствие. Подобно увеличим с центром подобия в точке O поверхность R_n^* до встречи с R_n^1 в некоторой точке $M(x_0^1, \ldots, x_0^n)$, причем в точке M поверхность R_n^1 и подобно увеличенная поверхность R_n^*, которую обозначим R_n^0, односторонне касаются, т. е. определенная формулой (9) величина $w \geqslant 0$. Между R_n^0 и R_n^1, очевидно, тоже установлено центральное соответствие.*

Если в соответственных точках поверхностей R_n^0 и R_n^1 функция Φ принимает равные значения, то поверхности R_n^1 и R_n^* подобны, а центральное соответствие есть подобие.

Доказательство. Из результатов работы А. Д. Александрова [3] следует, что на семействе $\{R_n^t\}$ Φ есть дифференцируемая по t функция при почти всех t. Поэтому, учитывая (8), имеем

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial\Phi}{\partial k_i}\frac{dk_i}{dt} + \frac{\partial\Phi}{\partial y_i^m} w_i + \frac{\partial\Phi}{\partial y^m} w. \tag{10}$$

В условиях теоремы

$$0 = \Phi(k_i^1; \overset{1}{y}{}_i^\alpha; \overset{1}{y}{}^\alpha; x) - \Phi(k_i^0; \overset{0}{y}{}_i^\alpha; \overset{0}{y}{}^\alpha; x) = \int_0^1 \frac{d\Phi}{dt}\,dt,$$

поэтому ввиду (10), получаем

$$\int_0^1 \frac{\partial\Phi}{\partial k_i}\frac{dk_i}{dt}\,dt + w_i\int_0^1 \frac{\partial\Phi}{\partial y_i^m}\,dt + w\int_0^1 \frac{\partial\Phi}{\partial y^m}\,dt = 0. \tag{11}$$

Преобразуем первое слагаемое в (11) к выражению, однородному относительно w, w_i, w_{ij}. Для этого, следуя А. Д. Александрову, разбиваем промежуток интегрирования $[0, 1]$ на конечное число множеств T_q, в каждом из которых имеется свой набор групп равных друг другу кривизн и существуют производные $\frac{dk_i}{dt}$. Рассмотрим одно из таких множеств T_q. Пусть число групп равных друг другу кривизн равно l. Обозначая значения кривизн в каждой группе через $\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_l$, имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial k_i}\frac{dk_i}{dt} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{k}_s}\frac{d\bar{k}_s}{dt} \quad (s = 1, \ldots, l). \tag{12}$$

Из результатов упоминавшейся уже работы А. Д. Александрова [3] следует, что $\bar{k}_s$ дифференцируемы по b_{ij}, g_{ij}. Из формул (4) и (7) следует, что g_{ij} и b_{ij} — дифференцируемые функции y^{α}_{pq}, y^{α}_r, y^{α}. Поэтому, учитывая (8), вместо (12) можем написать

$$\frac{\partial \Phi}{\partial k_i}\frac{dk_i}{dt} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{k}_s}\frac{\partial \bar{k}_s}{\partial b_{ij}} a_{m\beta}\xi^{\beta} w_{ij} + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{k}_s}\left(\frac{\partial \bar{k}_s}{\partial b_{ij}}\frac{\partial b_{ij}}{\partial y^m_r} + \frac{\partial \bar{k}_s}{\partial g_{ij}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^m_r}\right) w_r +$$
$$+ \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{k}_s}\left(\frac{\partial \bar{k}_s}{\partial b_{ij}}\frac{\partial b_{ij}}{\partial y^m} + \frac{\partial \bar{k}_s}{\partial g_{ij}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^m}\right) w. \tag{13}$$

Если в интеграл по множеству T_q подставим выражение (13), то, суммируя по всем T_q, получим первое слагаемое в (11), после чего (11) преобразуется к виду

$$w_{ij}\sum_q \int_{T_q} a_{m\beta}\xi^{\beta}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{k}_s}\frac{\partial \bar{k}_s}{\partial b_{ij}}\, dt + w_r \sum_q \int_{T_q}\left[\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{k}_s}\left(\frac{\partial \bar{k}_s}{\partial b_{ij}}\frac{\partial b_{ij}}{\partial y^m_r} + \frac{\partial \bar{k}_s}{\partial g_{ij}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^n_r}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial y^n_r}\right] dt +$$
$$+ w\sum_q \int_{T_q}\left[\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{k}_s}\left(\frac{\partial \bar{k}_s}{\partial b_{ij}}\frac{\partial b_{ij}}{\partial y^m} + \frac{\partial \bar{k}_s}{\partial g_{ij}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^n}\right) + \frac{\partial \Phi}{\partial y^m}\right] dt = 0. \tag{14}$$

Обозначая в (14) коэффициенты при w_{ij}, w_r, w через A^{ij}, B^r, C, имеем

$$A^{ij} w_{ij} + B^r w_r + Cw = 0. \tag{15}$$

Коэффициенты A^{ij}, B^r, C в условиях теоремы, как это следует из результатов работы [3], суть непрерывные функции, кроме того, уравнение (15) строго эллиптического типа, т. е. квадратичная форма $A^{ij}\eta_i\eta_j$ удовлетворяет условию

$$a\cdot\sum_i \eta_i^2 < A^{ij}\eta_i\eta_j < A\cdot\sum_i \eta_i^2. \tag{16}$$

По обозначению

$$A^{ij} = \sum_q \int_{T_q} a_{m\beta}\xi^{\beta}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{k}_s}\frac{\partial \bar{k}_s}{\partial b_{ij}}\, dt;$$

введем еще следующее обозначение для подынтегрального выражения:

$$A^{ij}_q(t) = a_{m\beta}\xi^{\beta}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \bar{k}_s}\frac{\partial \bar{k}_s}{\partial b_{ij}}.$$

Зафиксируем некоторую точку x и в этой точке введем координаты, в которых

$$g_{ij} = \delta_{ij}, \qquad b_{ij} = k_i \cdot \delta_{ij}.$$

Тогда

$$\frac{\partial \overline{k_s}}{\partial b_{ij}} = 0 \qquad i \neq j; \qquad i = j \neq s; \qquad \frac{\partial \overline{k_i}}{\partial b_{ii}} = 1.$$

Поэтому

$$A_q^{ij} = 0, \qquad i \neq j, \qquad A_q^{ii} = (a_{m\beta}\xi^\beta)\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \overline{k_i}}.$$

Но $\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \overline{k_i}} > q_0 > 0$, $a_{m\beta}\xi^\beta > a_0 > 0$, поэтому имеем, следовательно, и $A^{ii} > a_0 q_0 = a > 0$. Коэффициенты уравнения (15), ограничены, т. е.

$$A^{ii} < A.$$

Из всего выше сказанного следует (16).

По теореме C работы [2] следует, что уравнение (15) имеет единственное решение $w \equiv 0$, т. е. поверхности R_n^0 и R_n^1 совпадают (согласно теореме 1 той же работы [2]). Но поверхности R_n^0 и R_n^* подобны, следовательно, R_n^1 и R_n^* тоже подобны, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. П. Эйзенхарт, Риманова геометрия, ИЛ, М., 1948.
2. А. Д. Александров, Теоремы единственности для поверхностей в «целом», III, Вестник ЛГУ, № 7, 1958, 14—26.
3. А. Д. Александров, То же, II, Вестник ЛГУ, № 7, 1957, 15—44.

Поступила 28.III 1961 г.
Черновцы