О единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Н. Н. Чаус

1°. Рассматривается задача Коши

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t), \qquad u(x, 0) = f(x) \tag{1}$$

при $t \in [0, T]$, где T — произвольное конечное число > 0, $-\infty < x < \infty$, $P(s)$ — многочлен степени $p > 1$ с постоянными коэффициентами. Как известно [1], классом единственности решений данной задачи могут служить функции $u(x)$, удовлетворяющие неравенству $|u(x)| \leqslant Ce^{a|x|^{p'}}$ $\left(-\infty < x < \infty,\ C, a \text{ — положительные произвольные константы, } \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1\right)$. Для некоторых случаев, когда уравнение (1) имеет специальный вид, имеются более тонкие результаты. В частности, С. Тэклинд [2] указал необходимые и достаточные условия единственности решений задачи Коши для уравнения $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = (-1)^{b-1} \frac{\partial^{2b} u(x, t)}{\partial x^{2b}}$ (b — любое целое число > 0) в классе функций, удовлетворяющих неравенствам $\left| \frac{\partial^{2p} u(x)}{\partial x^{2p}} \right| < e^{a|x|h(|x|)}$ ($-\infty < x < \infty$, $p = 0, 1, \ldots, b-1$, $h(r)$ $(r > 0)$ — некоторая непрерывная положительная неубывающая функция). Таким условием является расходимость интеграла

$$\int_1^\infty \frac{dr}{h^{2b-1}(r)}.$$

В дальнейшем эти результаты были распространены Г. Н. Золотаревым [3] на $2b$-параболические в смысле Петровского системы с переменными коэффициентами*. В данной заметке получены аналогичные результаты для произвольного уравнения вида (1). Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Задача Коши (1) для общего многочлена $P(s)$ степени $p > 1$ может иметь только одно решение в классе функций, удовлетворяющих неравенствам*

$$|u(x)| \leqslant Ce^{|x|^{p'} l(|x|)} \qquad (-\infty < x < \infty),$$

где C — константа > 0, $l(r)$ $(r > 0)$ — любая непрерывная неубывающая положительная функция, для которой

$$\int_1^\infty \frac{dr}{rl(r)^{p-1}} = \infty. \tag{2}$$

Нетрудно проверить, что для уравнений, которые рассматривал С. Тэклинд, теорема дает классы единственности формально более широкие, чем у С. Тэклинда, так как у нас при прочих одинаковых условиях отсутствуют ограничения на производные от $u(x)$.

Доказательство теоремы будет вестись с помощью методов обобщенных функций и некоторых фактов из теории квазианалитических функций.

2°. Введем в рассмотрение некоторое специальное пространство $W_{M,1}^{\Omega, b_0}$. Предварительно сформулируем одно утверждение, принадлежащее Б. Я. Левину [4]:

Пусть непрерывная функция $l(x)$ $(x > 0)$ при $x > x_0 = x_0(\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию

$$C'_\varepsilon x^{-\varepsilon} < l(x) < C_\varepsilon x^\varepsilon \qquad (C'_\varepsilon, C_\varepsilon > 0).$$

Тогда для $l(x)$ и произвольного $p' > 0$ существует целая аналитическая функция $\varphi(z) \not\equiv 0$, для которой при любых $z = x + iy$

$$|\varphi(x + iy)| \leqslant Ce^{-l(|x|)|x|^{p'} + \gamma l(|y|)|y|^{p'}}$$

с некоторыми постоянными C и γ.

* Как выяснилось после написания этой заметки, Г. Н. Золотарев получил подобные условия для единственности решений экспоненциального типа по t произвольных систем с постоянными коэффициентами (Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та, вып. 3, 1963 г.).

Теперь рассмотрим пространство $W_{M,1}^{\Omega,b_0}$ при $M(x)=\Omega(x)=l(x)x^{p'}$, $p'>1$, где дополнительно предположим, что $l(x)$ — неубывающая функция. По определению [1], это пространство $W_{M,1}^{\Omega,b_0}$ состоит из целых аналитических функций $\varphi(z)$, для которых при любом $z=x+iy$

$$|\varphi(x+iy)|\leqslant C_{\varepsilon,\delta,\varphi}e^{-l(|ax|)|ax|^{p'}+l(|by|)|by|^{p'}} \tag{3}$$

при произвольном выборе $a=1-\varepsilon$, $b=b_0+\delta$, ε, $\delta>0$. Согласно теореме Б. Я. Левина, b_0 можно выбрать столь большим, что пространство $W_{M,1}^{\Omega,b_0}$ будет нетривиальным. Более того, оно будет достаточно богато функциями. Это следует из того, что операции сдвига $\varphi(x+iy)\to\varphi(x\pm h+iy)$ и умножения на $e^{i\sigma z}$ определены и непрерывны в этом пространстве. Заметим, что если функция $\varphi(z)$ в (3) оценивалась константами $C_{\varepsilon,\delta,\varphi}$, то ее сдвиг на вещественное h будет оцениваться константами $C_{\varepsilon,\delta,\varphi}\cdot e^{M(h)}$ Это мы используем в доказательстве следующего утверждения.

Лемма. *Последовательные производные по x функций из $W_{M,1}^{\Omega,b_0}$ удовлетворяют неравенствам*

$$|\varphi^{(q)}(x)|\leqslant C_{\varepsilon,\delta,\varphi}A^q q^{\frac{q}{p}}[l(q)]^{\frac{q}{p'}}e^{-l(|ax|)|ax|^{p'}}$$

$\left(-\infty<x<\infty,\ q=0,1,\ldots,\ A\text{—}\textit{некоторая константа, не зависящая от } q,\ \frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=1\right).$

Доказательство основывается на использовании формулы Коши

$$\varphi^{(q)}(x)=\frac{q!}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{(\xi-x)^{q+1}},$$

где Γ_R — окружность некоторого радиуса R с центром в точке x. Из нее следует, что

$$|\varphi^{(q)}(x)|\leqslant\frac{q!}{R^q}\max_{z\in\Gamma_R}|\varphi(z)|\leqslant\frac{q!}{R^q}C_{\varepsilon,\delta,\varphi}e^{-l(|a\tilde{x}|)|a\tilde{x}|^{p'}+l(|b\tilde{y}|)|b\tilde{y}|^{p'}}$$

(через $\tilde{z}=\tilde{x}+i\tilde{y}\in\Gamma_R$ мы обозначили точку максимума).

Теперь возьмем радиус R окружности Γ_R в виде $R=\left[\frac{q}{l(q)}\right]^{\frac{1}{p'}}$. При таком выборе R получаем

$$\frac{q!}{R^q}C_{\varepsilon,\delta,\varphi}e^{l(|b\tilde{y}|)|b\tilde{y}|^{p'}}\leqslant C_{\varepsilon,\delta,\varphi}q!\,q^{-\frac{q}{p'}}[l(q)]^{\frac{q}{p'}}e^{l(bR)(bR)^{p'}}\leqslant$$

$$\leqslant C_{\varepsilon,\delta,\varphi}q^q e^{-q}\sqrt{2\pi q}(1+s)\,q^{-\frac{q}{p'}}[l(q)]^{\frac{q}{p'}}e^{l(bR)\frac{q}{l(q)}b^{p'}}\qquad(s\to0 \text{ при } q\to\infty).$$

Полученное выражение при достаточно больших q не больше чем $C_{\varepsilon,\delta,\varphi}A_1^q q^{\frac{q}{p}}[l(q)]^{\frac{q}{p'}}$, где A_1 — некоторая константа, зависящая от $b=b_0+\delta$ и не зависящая от q. Поэтому для производных $\varphi^{(q)}(x)$ получаются оценки

$$|\varphi^{(q)}(x)|\leqslant C_{\varepsilon,\delta,\varphi}A_1^q q^{\frac{q}{p}}[l(q)]^{\frac{q}{p'}}e^{-l(|a\tilde{x}|)|a\tilde{x}|^{p'}}=\widetilde{B_{\varepsilon,\delta,\varphi,q}}\,e^{-l(|a\tilde{x}|)|a\tilde{x}|^{p'}}.$$

В последней формуле $\widetilde{x}$ можно заменить на x, изменив соответственно последовательность $\widetilde{B_{\varepsilon,\delta,\varphi,q}}$. Замена $\widetilde{x}$ на x эквивалентна сдвигу, и поэтому для новой последовательности $B_{\varepsilon,\delta,\varphi,q}$ получится $B_{\varepsilon,\delta,\varphi,q} \leqslant \widetilde{B_{\varepsilon,\delta,\varphi,q}} \cdot e^{M(R)} \leqslant \leqslant \widetilde{B_{\varepsilon,\delta,\varphi,q}} e^{q}$.

Тем самым лемма доказана.

3°. Вернемся теперь к вопросу единственности решения задачи Коши (1). Будет показано, что при $t \in [0, T]$ решение $u(x, t)$, для которого выполняется условие теоремы, определяется однозначно. Доказательство будем вести, рассматривая $u(x, t)$ как обобщенную функцию над основным пространством $\Phi = W^{\Omega_1, b_0}_{M_1, 1}$, которая непрерывно и дифференцируемым образом зависит от t. При этом положим $M_1(x) = \Omega_1(x) = l_1(x) x^{p'}$, где $l_1(x) = 2l(x)$, а p' определим через порядок p полинома $P(s)$: $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$. Тот факт, что $u(x, t)$ есть решение уравнения (1), будет пониматься в обобщенном смысле, т. е. для любой $\varphi(x) \in W^{\Omega, b_0}_{M_1, 1}$, $t \in [0, T]$ будет предполагаться

$$\text{а)}\quad \frac{\partial}{\partial t}(u(x, t), \varphi(x)) = \left(u(x, t), \overline{P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)} \varphi(x)\right)$$

и

$$\text{б)}\quad \lim_{t \to 0} (u(x, t), \varphi(x)) = (u(x, 0), \varphi(x)),$$

где $\overline{P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)}$ — формально сопряженное выражение к $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$. Можно показать, что любое обычное решение задачи (1) является и решением в обобщенном смысле. Доказательство этого факта, когда в качестве Φ взято пространство $S^{\beta, B}_{\alpha, A}$ имеется в [1]. Оно без труда переносится и на случай $\Phi = W^{\Omega_1, b_0}_{M_1, 1}$.

Итак, пусть решение $u(x, t)$ задачи (1), где $f(x) = u(x, 0) = 0$, удовлетворяет условию теоремы.

Рассмотрим при каждом $\varphi \in W^{\Omega_1, b_0}_{M_1, 1}$ функцию

$$F_{\varphi}(t) = (u(x, t), \varphi(x)) = \int u(x, t) \varphi(x)\, dx, \qquad t \in [0, T).$$

Легко видеть, что $F_{\varphi}(t)$ — бесконечно-дифференцируемая функция и что $|F^{(n)}_{\varphi}(t)| = \left|\left(u(x, t), \overline{P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n} \varphi(x)\right)\right|$. Оценим $\left|\overline{P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n} \varphi(x)\right|$. $\overline{P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)}$ есть дифференциальное выражение порядка p с постоянными коэффициентами. Пусть a_0 — максимум абсолютных значений этих коэффициентов. Тогда

$$\left|\overline{P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)} \varphi(x)\right| \leqslant a_0 \sum_{i=0}^{p} |\varphi^{(i)}(x)| \leqslant a_0 (p+1) \max_{0 \leqslant i \leqslant p} |\varphi^{(i)}(x)|.$$

Последовательно находим

$$\left|\overline{P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n} \varphi(x)\right| \leqslant a_0^n (p+1)^n \max_{0 \leqslant i \leqslant np} |\varphi^{(i)}(x)|.$$

Теперь, воспользовавшись леммой, легко оценить величину $|F_{\varphi}^{(n)}(t)|$:

$$|F_{\varphi}^{(n)}(t)|=\left|\left(u(x, t), \overline{P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n}} \varphi(x)\right)\right| \leqslant \int|u(x, t)| a_{0}^{n}(p+1)^{n} \max_{0<i \leqslant np}|\varphi^{(i)}(x)| dx \leqslant$$

$$\leqslant C_{\varepsilon,\delta,\varphi} A^{np}(np)^{\frac{np}{p}}\left[l_{1}(np)\right]^{\frac{np}{p'}} a_{0}^{n}(p+1)^{n} \int|u(x, t)| e^{-l_{1}(|ax|)|ax|^{p'}} dx=$$

$$=C_{\varepsilon,\delta,\varphi}\left[A^{p} p a_{0}(p+1)\right]^{n} n^{n}\left[l_{1}(np)\right]^{n(p-1)} \cdot M=C_{\varepsilon,\delta,\varphi}^{\prime} B^{n} n^{n}\left[l_{1}(np)\right]^{n(p-1)}$$

(через M обозначено значение интеграла, которое благодаря выбору $l_1(x)= = 2l(x)$ конечно). Мы получили, что производные функции $F_{\varphi}(t)$ ограничены величинами $m_n = C'_{\varepsilon,\delta,\varphi}B^n n^n [l_1(np)]^{n(p-1)}$. С другой стороны, $F_{\varphi}(t)$ в точке $t=0$ обращается в нуль вместе со своими производными.

Из теории квазианалитических функций известно, что если для m_n выполняется условие $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{m_n}} = \infty$, то тогда $F_{\varphi}(t)$ равна нулю тождественно. Но условие это выполнено, так как $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{m_n}} =$ $= \sum \frac{1}{\sqrt[n]{C'_{\varepsilon,\delta,\varphi}}\, Bn\,[l_1(np)]^{p-1}}$, а последний ряд расходится благодаря условию (2). Следовательно, на каждой $\varphi(x)$ из $W_{M_1,1}^{\Omega_1,b_0}$ $\int u(x,t)\varphi(x)\,dx = 0$, $t \in [0, T]$. Благодаря тому, что $W_{M_1,1}^{\Omega,b_0}$ достаточно богато функциями, $u(x,t)$ ($t \in [0, T]$) будет равно нулю тождественно.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, Обобщенные функции, вып. 3, Физматгиз, М., 1958.

2. S. Täcklind, Sur les classes quasianalytiques des solutions des équations aux derives partielles du type parabolique, Nora Acta Reqiel Societatis Scientiarum Upsaliensis, (4), vol. 10, 1936.

3. Г. Н. Золотарев, О единственности решения задачи Коши для систем, параболических в смысле И. Г. Петровского, Изв. высш. уч. завед., матем., 2(3), 1958.

4. Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, Физматгиз, М., 1956.

Поступила 30. IX 1963 г.

Киев