О задаче многоэтапного обслуживания с потерями

Н. В. Яровицкий

1. Пусть некоторый случайный поток поступает на обслуживающий прибор. Абоненты потока, поступившие в моменты времени, когда прибор свободен от обслуживания других абонентов, начинают немедленно обслуживаться. Если абонент поступил, когда прибор был занят, то *абонент* теряется. Абоненты, прошедшие обслуживание на первом этапе, последовательно поступают на последующие этапы, где повторяется аналогичная

картина. Описанную схему мы называем многоэтапным обслуживанием с потерями. На практике многоэтапное обслуживание встречается при проектировании многостаночных автоматических линий, в некоторых транспортных задачах, в радиолокации.

Цель работы заключается в определении зависимости между распределениями выходящего потока любого этапа и распределениями входящего потока, поступающего на первый этап, а также в вычислении интенсивностей выходящих потоков.

Трудность решения задачи многоэтапного обслуживания заключается в том, что во всех практически важных случаях (исключение представляет лишь случай мгновенного обслуживания) выходящий поток оказывается потоком более сложного типа, чем входящий поток.

В работе [4] введено понятие односвязно-зависимых потоков. Там же доказано, что если входящий поток, поступающий на однолинейную систему обслуживания с потерями, является стационарным ординарным потоком размерности $n \geqslant 0$, а время обслуживания распределено по произвольному закону, то выходящий поток является стационарным ординарным односвязно-зависимым потоком размерности $n+1$.

Для дальнейшего необходимо привести определение односвязно-зависимых потоков и некоторые сведения о них.

Пусть $\{\bar{\xi}_i\} = \{\xi_i^{(1)}, \ldots, \xi_i^{(n)}\}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots;\ n \geqslant 0$ — целое) — последовательность n-мерных взаимно независимых одинаково распределенных случайных векторов с независимыми неотрицательными компонентами. Пусть $\{\eta_i\}$ $(i=0, 1, 2, \ldots;\ \eta_0=0)$—последовательность взаимно независимых неотрицательных случайных величин. Если $n=0$, то положим $\xi_i \equiv 0$ $(i=0, 1, 2, \ldots)$. Предположим следующую зависимость между $\bar{\xi}_i$ и η_i: при каждом фиксированном i $\bar{\xi}_i$ и η_j $(j = \overline{0, i})$, а также η_i и $\bar{\xi}_j$ $(j = \overline{0, i-2};\ i > 1)$ взаимно независимы, но каждая η_i $(i = 1, 2, \ldots)$ зависит от $\bar{\xi}_{i-1}$. Построим последовательность случайных величин $\{\zeta_i\} = \{\xi_i^{(n)} + \eta_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Пусть промежутки времени между последовательными событиями потока совпадают со случайными величинами ζ_i. Такой поток называется *односвязно-зависимым размерности* n.

Односвязно-зависимый поток размерности n, который при произвольном целом $\nu > 0$, каждом n-мерном векторе $\bar{x} = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ $(x^{(n)} \geqslant 0,\ k=\overline{1, n})$ и любом натуральном i обладает свойством

$$\boldsymbol{P}\{\zeta_{i+\nu} \in A \,|\, \bar{\xi}_{i+\nu-1} = \bar{x}\} = \boldsymbol{P}\{\zeta_i \in A \,|\, \bar{\xi}_{i-1} = \bar{x}\},$$

называется *стационарным*.

Если для всех i при каждом n-мерном векторе $\bar{x}$ с неотрицательными компонентами

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \boldsymbol{P}\{\zeta_i \leqslant t \,|\, \bar{\xi}_{i-1} = \bar{x}\} = 0,$$

то поток называется *ординарным*.

Односвязно-зависимый поток размерности 0 является потоком с ограниченным последствием. Если такой поток обладает свойствами стационарности и ординарности, то он является потоком типа Пальма. Введенные нами определения стационарности и ординарности односвязно-зависимого потока размерности n при $n = 0$ совпадают с аналогичными определениями, известными для потоков типа Пальма.

Введем обозначения:

$$H(t \,|\, \bar{x}) \equiv \boldsymbol{P}\{\xi_i \leqslant t \,|\, \bar{\xi}_{i-1} = \bar{x}\},$$

$$G(t \,|\, \bar{x}) \equiv \boldsymbol{P}\{\eta_i \leqslant t \,|\, \bar{\xi}_{i-1} = \bar{x}\},$$

$$F^{(k)}(x^{(k)}) \equiv \boldsymbol{P}\{\xi_i^{(k)} \leqslant x^{(k)}\} \qquad (k=\overline{1, n}),$$

$$F(\bar{x}) \equiv \boldsymbol{P}\{\bar{\xi}_i \leqslant \bar{x}\} = \prod_{k=1}^{n} F^{(k)}(x^{(k)}).$$

Системы функций распределения $\{H, F^{(k)}(k=\overline{1, n})\}$ и $\{G, F^{(k)}\ (k=\overline{1, n})\}$ называются соответственно *первой* и *второй совокупностями определяющих функций* потока. Стационарный ординарный односвязно-зависимый поток размерности $n > 0$ однозначно определяется заданием каждой из этих совокупностей. Условные функции распределения $H(t \mid \bar{x})$ и $G(t \mid \bar{x})$ связаны соотношением

$$H(t \mid \bar{x}) = \int_0^t G(t-\tau \mid \bar{x})\, dF^{(n)}(\tau). \tag{1}$$

2. Пусть на однолинейную систему обслуживания с потерями поступает стационарный ординарный односвязно-зависимый поток размерности $n > 0$. Обозначим через $\{g, f^{(k)}\ (k=1, n)\}$ вторую совокупность определяющих функций входящего потока. Пусть случайные величины ξ_i означают длительности обслуживания абонентов. Предположим, что ξ_i $(i=1, 2, \ldots)$ взаимно независимы и одинаково распределены с функцией распределения $F(x) = \boldsymbol{P}\{\xi_i \leqslant x\}$.

Как уже отмечалось, при сделанных предположениях выходящий поток является стационарным ординарным односвязно-зависимым размерности $n+1$. Обозначим через $\{G, F^{(k)}(k=\overline{1, n+1})\}$ вторую совокупность определяющих функций выходящего потока. В [4] показано, что при этом

$$F^{(k)}(x^{(k)}) \equiv f^{(k)}(x^{(k)}) \qquad (k=\overline{1, n})$$

и

$$F^{(n+1)}(x) = F(x).$$

Пусть нам известна совокупность $\{g, f^{(k)}(k=\overline{1, n})\}$. Тогда для того чтобы найти совокупность $\{G, F^{(k)}(k=\overline{1, n+1})\}$ функций распределения, однозначно определяющих выходящий поток, достаточно выразить функцию распределения $G(t \mid \bar{X})$, где обозначено $\bar{X} = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}, x)$, через $g(t \mid \bar{x})$, где $\bar{x} = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$.

Выведем интегральное уравнение, связывающее функции $G(t \mid X)$ и $g(t \mid \bar{x})$.

Очевидно, что событие, заключающееся в том, что промежуток незанятости системы η_i не превзойдет величины $t \geqslant 0$ при условии, что $\bar{\xi}_{i-1} = \bar{x}$ и $\xi = x$, т. е. что ушедший в начале этого промежутка абонент проходил обслуживание в течение времени x, может осуществиться лишь с одним и только одним из следующих двух несовместимых событий. Событие A_1 — за промежуток времени x не произошло событий входящего потока, т. е. не произошло потерь.

Событие A_2 — за промежуток x такие события произошли. Обозначим через $R_1(t \mid \bar{X})$ вероятность одновременного осуществления событий $\{\eta_i < t \mid \bar{\xi}_{i-1} = \bar{x}, \xi = x\}$ и A_1, а через $R_2(t \mid \bar{X})$ — вероятность одновременного осуществления событий $\{\eta_i < t \mid \bar{\xi}_{i-1} = \bar{x}, \xi = x\}$ и A_2. Тогда

$$G(t \mid \bar{X}) = R_1(t \mid \bar{X}) + R_2(t \mid \bar{X}). \tag{2}$$

Так как плотность условного распределения случайной величины η_i равна $d_y g(y \mid \bar{x})$, то вероятность того, что промежуток времени между двумя последовательными событиями не превзойдет величины $t+x$, равна

$$\int_0^{t+x} f^{(n)}(t+x-y)\, d_y g(y \mid \overline{x}).$$

С другой стороны, вероятность этого же события равна

$$R_1(t \mid \overline{X}) + \int_0^x f^{(n)}(x-y)\, d_y g(y \mid \overline{x}).$$

Приравнивая эти выражения, получаем

$$R_1(t \mid \overline{X}) = \int_0^{t+x} f^{(n)}(t+x-y)\, d_y g(y \mid \overline{x}) - \int_0^x f^{(n)}(x-y)\, d_y g(y \mid \overline{x}). \tag{3}$$

Пусть теперь за промежуток времени x происходят события входящего потока, и $\overline{x}_1$ — значение случайного вектора $\overline{\xi}_1$, соответствующего промежутку времени между событием, происшедшим в начальный момент времени промежутка x и первым последующим за ним событием входящего потока. Тогда, очевидно, что

$$R_2(t \mid \overline{X}) = \int_0^x \int_0^{x-y} G(t \mid \overline{x}_1\, x - x_1^{(n)} - y)\, df(\overline{x}_1)\, d_y g(y \mid \overline{x}). \tag{4}$$

Здесь использовано обозначение

$$\int_0^a \varphi(t \mid \overline{x})\, df(\overline{x}) = \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \int_0^a \varphi(t \mid \overline{x})\, df^{(1)}(x^{(1)}) \ldots df^{(n)}(x^{(n)}),$$

где $a \geqslant 0$, $\varphi(t \mid \overline{x})$ — некоторая условная функция распределения и $f(\overline{x}) = \prod_{k=1}^{n} f^{(k)}(x^{(k)})$.

Подставляя (3) и (4) в (2), получаем интегральное уравнение

$$G(t \mid \overline{X}) = \int_0^{t+x} f^{(n)}(t+x-y)\, d_y g(y \mid \overline{x}) - \int_0^x f^{(n)}(x-y)\, d_y g(y \mid \overline{x}) +$$

$$+ \int_0^x \int_0^{x-y} G(t \mid \overline{x}_1, x - x_1^{(n)} - y)\, df(\overline{x}_1)\, d_y g(y \mid \overline{x}). \tag{5}$$

Если входящий поток является потоком типа Пальма, т. е. стационарным ординарным односвязно-зависимым потоком размерности 0, и $h(x)$ — распределение промежутков времени между событиями этого потока, то уравнение (5) принимает вид

$$G(t \mid x) = h(t+x) - h(x) + \int_0^x G(t \mid x-z)\, dh(z). \tag{6}$$

Введем операторы K и $\hat{K}$ следующими равенствами:

$$K\varphi(t \mid \overline{X}) = \int_0^x \int_0^{x-y} \varphi(t \mid \overline{x}_1, x - x_1^{(n)} - y)\, df(\overline{x}_1)\, d_y g(y \mid \overline{x}), \tag{7}$$

$$\hat{K}\psi(t \mid x) = \int_0^x \psi(t \mid x-z)\, dh(z), \tag{8}$$

где $\varphi(t\,|\,\overline{X})$ и $\psi(t, \overset{0}{x})$ — некоторые функции распределения. Тогда уравнения (5) и (6) можно записать соответственно в виде

$$G(t\,|\,\overline{X}) = R_1(t\,|\,\overline{X}) + KG(t\,|\,\overline{X}) \tag{9}$$

и

$$G(t\,|\,x) = r_1(t\,|\,x) + \hat{K}G(t\,|\,x), \tag{10}$$

где операторы K и $\hat{K}$ определяются равенствами (7) и (8), функция $R_1(t\,|\,\overline{X})$ — равенством (3) и $r_1(t\,|\,x) = h(t+x) - h(x)$.

Решим уравнения (9) и (10) методом последовательных приближений. Выбрав за нулевые приближения соответственно $R_1(t\,|\,\overline{X})$ и $r_1(t\,|\,x)$ и построив последовательности приближений, получим решение уравнений (9) и (10) соответственно в виде рядов

$$G(t\,|\,\overline{X}) = \sum_{l=0}^{\infty} K^l R_1(t\,|\,\overline{X}) \tag{11}$$

и

$$G(t\,|\,x) = \sum_{l=0}^{\infty} \hat{K}^l r_1(t\,|\,x). \tag{12}$$

Ряды (11) и (12) при каждом фиксированном $(n+1)$-мерном векторе $\overline{X}(x^{(k)}, x \geqslant 0;\ k = \overline{1, n})$, соответственно при каждом фиксированном $x \geqslant 0$, сходятся равномерно по t на полуоси $[0, +\infty)$. Следовательно, выражения (11) и (12) служат решениями уравнений соответственно (9) и (10), а значит, и уравнений (5) и (6).

3. При исследовании многоэтапного обслуживания одной из основных задач является нахождение интенсивностей выходящих потоков. При этом оказывается удобным пользоваться не формулами (11) и (12), а соответствующими им соотношениями между преобразованиями Лапласа. Цель достигается, если задан произвольный конкретный закон распределения времени обслуживания. Для простоты предположим, что время обслуживания распределено по показательному закону с параметром $\alpha > 0$, т. е.

$$F(x) = 1 - e^{-\alpha x}. \tag{13}$$

Введем преобразования Лапласа — Стильтьеса некоторой условной функции распределения $\varphi(t\,|\,\overline{x})$ $(\overline{x} = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}))$ по одной, двум и трем переменным следующими равенствами:

$$\varphi^*(u) = \int_0^\infty e^{-ut} \int_0^\infty d_t \varphi(t\,|\,\overline{x})\, df(\overline{x}),$$

$$\varphi^{**}(u, v) = \int_0^\infty e^{-ut} \int_0^\infty e^{-vx^{(n)}} d_t \varphi(t\,|\,\overline{x})\, df(\overline{x}),$$

$$\varphi^{***}(u, w, v) = \int_0^\infty e^{-ut} \int_0^\infty e^{-vx^{(n)} - wx^{(n-1)}}\, d_t \varphi(t\,|\,\overline{x})\, df(\overline{x}).$$

Выясним, какой операции над преобразованиями Лапласа соответствует применение к функциям $\varphi(t\,|\,\overline{X})$ и $\varphi(t\,|\,x)$ операторов K и $\hat{K}$, определенных равенствами (7) и (8).

Пусть $\psi(t\,|\,\overline{X}) = K\varphi(t\,|\,\overline{X})$. Тогда

$$\psi^{**}(u, v) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ut-vx}\int_0^x\int_0^{x-y} d_t\varphi(t\,|\,\overline{x}_1, x - x_1^{(n)} - y)\,dF(x)\,dg(y)\,df(\overline{x}_1).$$

На основании (13) находим

$$\psi^{**}(u, v) = \alpha\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ut-(v+\alpha)x}\int_0^x\int_0^{x-y} d_t\varphi(t\,|\,\overline{x}_1, x - x_1^{(n)} - y)\,dx\,dg(y)\,df(\overline{x}_1).$$

Применив подстановку $s = x - x_1^{(n)} - y$, получим

$$\psi^{**}(u, v) = g^*(v+\alpha)\,\varphi^{***}(u, v+\alpha, v). \tag{14}$$

Если теперь $\hat{\psi}(t\,|\,x) = \hat{K}\hat{\varphi}(t\,|\,x)$, то аналогично предыдущему получим

$$\hat{\psi}^{**}(u, v) = h^*(v+\alpha)\,\hat{\varphi}^{**}(u, v). \tag{15}$$

Найдем преобразования Лапласа функций $R_1(t\,|\,\overline{X})$ и $r_1(t\,|\,x)$. Имеем

$$R_1^{***}(u, w, v) = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-ut-wx^{(n)}-vx}\int_0^{t+x} d_t f^{(n)}(t+x-y)\,dF(x)\,df(\overline{x})\,d_y g(y\,|\,\overline{x}).$$

Произведя замену $s = t + x - y$, получим

$$R_1^{***}(u, w, v) = \int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-us-uy-wx^{(n)}}\left\{\int_0^{s+y} e^{-(v-u)x}\,dF(x)\right\} df^{(n)}(s)\,df(\overline{x})\,d_y g(y\,|\,\overline{x}).$$

Применяя (13), находим

$$R_1^{***}(u, w, v) = \frac{\alpha}{u-v-\alpha}\{g^{**}(u+\alpha, w)\,f^{(n)*}(v+\alpha) - g^{**}(u, w)\,f^{(n)*}(u)\}. \tag{16}$$

Исходя из (14) и (16), по индукции нетрудно получить

$$[K^l R_1(t\,|\,\overline{X})]^{**} = \frac{\alpha}{u-v-\alpha}\,g^*(v+\alpha)\,[g^{**}(v+\alpha, v+\alpha)]^{l-1}\times$$

$$\times[g^{**}(v+\alpha, v+\alpha)\,f^{(n)*}(v+\alpha) - g^*(u)\,f^{(n)*}(u)] \qquad (l = 1, 2, \ldots).$$

Тогда на основании (11) имеем

$$G^{**}(u, v) = \frac{\alpha}{u-v-\alpha}\Bigg\{[g^*(v+\alpha)\,f^{(n)*}(v+\alpha) - g^*(u)\,f^{(n)*}(u)] +$$

$$+\frac{g^*(v+\alpha)}{1-g^{**}(v+\alpha, v+\alpha)}[g^{**}(v+\alpha, v+\alpha)\,f^{(n)*}(v+\alpha) -$$

$$-g^{**}(u, v+\alpha)\,f^{(n)*}(u)]\Bigg\}. \tag{17}$$

В случае входящего потока типа Пальма, вместо (16), получаем

$$r_1^{**}(u, v) = \frac{\alpha}{u-v-\alpha}[h^*(v+\alpha) - h^*(u)],$$

а вместо (17) —

$$G^{**}(u, v) = \frac{\alpha[h^*(v+\alpha) - h^*(u)]}{(u-v-\alpha)[1-h^*(v+\alpha)]}. \tag{18}$$

В работе [4] найдена формула для интенсивности μ стационарного ординарного односвязно-зависимого потока. Эта формула имеет вид

$$\mu = \left\{ \int_0^\infty t dH(t) \right\}^{-1}, \tag{19}$$

где $H(t)$ — стационарное распределение потока. Нетрудно показать, что (19) можно записать в виде

$$\mu = - \left\{ \frac{d}{du} G^*(0) + \frac{d}{du} F^*(0) \right\}^{-1}. \tag{20}$$

Полагая в (17) $v = 0$, дифференцируя по u, подставляя $u = 0$ и складывая с $\frac{d}{du} F^*(0) = -\frac{1}{\alpha}$, из (20) после простых преобразований получаем

$$\mu = \frac{\mu' [1 - g^{**}(\alpha, \alpha)]}{1 - g^{**}(\alpha, \alpha) - \mu' \left[\frac{d}{du} g^{**}(0, \alpha) + f^{(n)*}(\alpha) \frac{d}{du} f^{(n)*}(0) \right]}, \tag{21}$$

где через μ' обозначена интенсивность входящего потока.

Аналогичным путем из формулы (18) можно найти

$$\mu = \mu' [1 - h^*(\alpha)]. \tag{22}$$

4. Пример. Используем полученные формулы для вычисления характеристик выходящих потоков. Пусть входящий поток, поступающий на первый этап, является стационарным пуассоновским с параметром $\lambda > 0$, а время обслуживания на всех этапах распределено показательно с параметром $\alpha_k > 0$ $(k = \overline{1, n})$ на k-м этапе.

Обозначим через μ_k интенсивность выходящего потока k-го этапа, через π_k — вероятность потери и через s_k — долю занятости обслуживающего прибора на k-м этапе (определения и формулы см. в работе [4]).

Исходя из формул (21) и (22), получаем

$$\mu_1 = \lambda\alpha_1/(\lambda + \alpha_1), \qquad \pi_1 = \lambda/(\lambda + \alpha_1), \qquad s_1 = \lambda/(\lambda + \alpha_1),$$

$$\mu_2 = \frac{\lambda\alpha_1\alpha_2 (\lambda + \alpha_1 + \alpha_2)}{(\lambda + \alpha_1)(\lambda + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2)}, \tag{23}$$

$$\pi_2 = \frac{\lambda\alpha_1}{(\lambda + \alpha_1)(\alpha_1 + \alpha_2)}, \qquad s_2 = \frac{\lambda\alpha_1 (\lambda + \alpha_1 + \alpha_2)}{(\lambda + \alpha_1)(\lambda + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Формула для π_1 совпадает с выражением для вероятности потери, полученным по формулам Эрланга (см., например, [1] стр. 53 или [2] стр. 67).

Полагая в (23) $\alpha_1 = \lambda$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = \lambda$ соответственно получим

$$\mu_2 = \frac{\lambda\alpha (2\lambda + \alpha)}{2(\lambda + \alpha)^2} \text{ и } \mu_2 = 3\lambda/8,$$

что полностью совпадает с результатами, полученными в статье [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. В. Гнеденко, Лекции по теории массового обслуживания, вып. 1—2, Изд-во АН УССР, К., 1960.

2. А. Я. Хинчин, Математические основы теории массового обслуживания, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XLIX, Изд-во АН СССР, М., 1953.

3. Н. В. Яровицкий, О некоторых свойствах односвязно-зависимых потоков, УМЖ, т. XIV, № 2, 1962.

4. М. В. Яровицький, Про векторні одногзв'язно-залежні потоки, ДАН УРСР, № 6, 1962.

Поступила 22. I 1962 г.
Киев