Спектральные разложения инфинитезимальных операторов четырехмерной группы сдвигов

В. П. Гачок, М. Л. Горбачук

Аксиоматический подход в теории поля состоит в том, что в основу теории кладутся некоторые общие физические требования: лоренцова инвариантность, спектральность, причинность и другие. При этом объектами исследования являются вакуумные средние произведений полевых операторов. Уайтман [1, 2] впервые предложил рассматривать их как обобщенные функции. Это дало возможность получить ряд интересных следствий, вытекающих из аксиом теории. В последнее время появился ряд работ, посвященных математическому обоснованию основных положений теории поля [2—5]. Следует отметить работу Ульмана [3], в которой высказана идея применения теоремы Наймарка [6] о представлении локально компактной группы, а также работу Борхерса [5], в которой ясно проведена схема построения гильбертова пространства и алгебры полевых операторов при помощи функционалов Уайтмана.

Настоящая работа посвящена дальнейшему изучению схемы Борхерса [5]. Показано, что, пользуясь этой схемой, можно построить теорию разложения вакуумных средних по обобщенным собственным функциям операторов энергии-импульса [7, 10]. В обосновании этого разложения существенно то, что функционал Уайтмана полностью описывает теорию поля. Полученные результаты дают возможность обосновать известную в теории поля [9] процедуру разложения элементов матрицы рассеяния по промежуточным состояниям.

1°. Будем рассматривать релятивистскую теорию нейтрального скалярного поля, которая описывается следующими аксиомами.

I. Пространство состояний есть гильбертово пространство с элементами Φ, Ψ и скалярным произведением (Φ, Ψ).

II. Рассмотрим пространство $S(R^4)$ функций точки $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ четырехмерного пространства, бесконечно дифференцируемых и убывающих на бесконечности вместе с производными быстрее любой степени $\frac{1}{|x|}$. Каждой функции $\varphi(x) \in S(R^4)$ ставится в соответствие линейный оператор $A(\varphi)$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, который называется полевым. Все операторы $A(\varphi)$ имеют общую плотную в $\mathfrak{H}$ область определения D, причем

$$A(\varphi) D \subset D,\ A(\alpha\varphi) = \alpha A(\varphi),\ A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2),\ A(\overline{\varphi}) = A^*(\varphi).$$

Если Φ и $\Psi \in D$, то $(\Phi, A(\varphi)\psi)$ есть антилинейный непрерывный функционал над пространством $S(R^4)$, т. е. $(\Phi, A(\varphi)\Psi) = \langle f_{\Psi,\Phi}, \varphi\rangle$, где $f_{\Psi,\Phi}$ — обобщенная функция ($\langle\, .\,, .\,\rangle$ обозначает действие функционала на основную функцию).

III. Рассмотрим неоднородную группу Лоренца, элементы которой обозначим (a, Λ), где a — сдвиг в четырехмерном пространстве и Λ — элемент однородной группы Лоренца. Пусть существует некоторое непрерывное унитарное представление $U(a, \Lambda)$ в $\mathfrak{H}$ этой группы, которое удовлетворяет следующим условиям:

$$U(a, \Lambda) D \subset D,\ U(a, \Lambda) A(\varphi) U^{-1}(a, \Lambda) = A(\varphi_{(a,\Lambda)}),$$

где $\varphi_{(a,\Lambda)} = \varphi(\Lambda^{-1}(x - a))$.

Для формулировки аксиомы IV нам потребуется один результат из теории представления групп. Обозначим $U(a) = U(a, 1)$, где 1 — тождественное преобразование в R^4. Тогда $U(a)$ — непрерывное унитарное представление группы сдвигов в R^4. Известно, что такое представление допускает спектральное разложение [6]

$$U(a) = \int\limits_{R^4} e^{i(p\cdot a)}\, dE(p),$$

где $p\cdot a = p^0a^0 - (p_1a_1 + p_2a_2 + p_3a_3)$ и $E(p)$ — однозначно определенная спектральная мера на борелевских множествах R^4. Мера $E(p)$ известным образом порождает инфинитезимальные операторы $P_j = \int\limits_{R^4} p^j dE(p)$ $(j = 0, 1, 2, 3)$ унитарного представления группы $U(a)$, которые называются операторами энергии-импульса.

IV. Носитель меры $E(\Delta)$ содержит изолированную точку $p = 0$ и содержится в верхней полости светового конуса $L_+^{\mu} = \{p : p^0 > 0\ \ (p, p) > \mu^2 > 0\}$.

Благодаря аксиоме II можно сопоставить каждой функции

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(x_k),\ \ \varphi_k(x_k) \in S(R^4),\ \ k = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

оператор $A(\varphi) = A(\varphi_1)\ldots A(\varphi_n)$ с областью определения D.

Пусть ψ_0 — некоторый вектор, отвечающий собственному значению $\lambda = 0$ $(P_j\psi_0 = 0\ \ (j = 0, \ldots, 3))$, так называемое вакуумное состояние.

V. Вектор ψ_0 циклический, т. е. $A(\varphi)\,\psi_0$ образует плотное множество в $\mathfrak{H}$, когда φ пробегает все векторы (1).

Назовем вакуумным средним порядка n полилинейный функционал

$$F_n(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = (\psi_0, A(\varphi_1)\ldots A(\varphi_n)\,\psi_0) = \langle F_n, \varphi_1\ldots\varphi_n\rangle \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

В силу аксиомы II F_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ является обобщенной функцией по каждой из переменных. Используя теорему о ядре [8], получаем, что F_n — обобщенная функция по совокупности переменных. Последовательность $(F_0, \ldots, F_n, \ldots)$ является функционалом Уайтмана.

Ниже, следуя работе Борхерса [5], изучается топология некоторых пространств, что важно при разложении по обобщенным собственным функциям вакуумного среднего.

2°. Рассмотрим последовательность пространств $S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots$, где S_0 — пространство комплексных чисел, а $S_n = S(R^{4n})$ (под $S(R^m)$ понимается пространство бесконечно дифференцируемых функций над R^m, убывающих на бесконечности вместе со всеми производными быстрее любой степени $\frac{1}{|x|}$). Пусть Σ обозначает совокупность всех финитных последовательностей вида

$$f = \{f_0, f_1(x_1),\ f_2(x_1, x_2), \ldots, f_i(x_1, \ldots, x_i), \ldots\},\ \ f_i(x_1, \ldots, x_i) \in S_i.$$

Определим в Σ обычным образом операции сложения и умножения на число. Кроме того, введем произведение элементов из Σ по формуле

$$f \times g = \{f_0\cdot g_0, f_0g_1(x_1) + f_1(x_1)\,g_0, \ldots, \sum_{k+l=i} f_k(x_1, \ldots, x_k)\,g_l(x_{k+1}, \ldots, x_i), \ldots\}$$

и инволюцию

$$f \to f^* = \{\overline{f_0}, \overline{f_1(x_1)}, \ldots, \overline{f_i(x_1, \ldots, x_i)}, \ldots\}.$$

Очевидно, Σ образует алгебраическое кольцо с инволюцией.

Пусть теперь в R^4 действует неоднородная группа Лоренца с элементами (a, Λ). Тогда по определению

$$(a, \Lambda) f = (a, \Lambda) \{f_0, f_1(x_1), \ldots, f_i(x_1, \ldots, x_i), \ldots\} = \{f_0, f_1(\Lambda^{-1}(x-a)), \ldots,$$

$$f_i(\Lambda^{-1}(x_i - a), \ldots, \Lambda^{-1}(x_i - a), \ldots\} \quad (f \in \Sigma)$$

Операция (a, Λ) переводит Σ в Σ, так как пространства S_i инвариантны относительно сдвигов и однородного преобразования Лоренца. Каждому элементу $f \in \Sigma$ сопоставим элемент

$$Ff = F\{f_0, f_1(x_1), \ldots, f_i(x_1, \ldots, x_i), \ldots\} = \{f_0, Ff_1, \ldots, Ff_1, \ldots\},$$

где Ff_i — преобразование Фурье функции $f_i (i = 1, 2, \ldots)$. Обозначим через I_{sp} множество тех $g \in \Sigma$, для которых при любом $n\,(Fg_n)(p_1, \ldots, p_n) = 0$, если $p_n, p_{n-1} + p_n, \ldots, p_1 + \ldots + p_n \in \bar{L}_+$, где $\bar{L}_+$ — замыкание верхнего светового конуса. I_{sp} является линейным множеством пространства Σ.

Введем в Σ понятие сходимости следующим способом. Будем говорить, что последовательность $f^{(n)} \in \Sigma$ сходится к элементу $f \in \Sigma$, если существует такое натуральное N, что $f_i^{(n)} \equiv 0 \; (n = 1, 2, \ldots)$ для всех $i > N$, а $f_i^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} f$ в топологии пространства S_i для $i \leqslant N$. В пространстве Σ можно так определить топологию, чтобы определенная выше сходимость совпадала со сходимостью последовательности в этой топологии. Действительно, пусть Σ_m — совокупность всех $f = \{f_0, f_1(x_1), \ldots, f_i(x_1, \ldots, x_i), \ldots\}$, для которых $f_i \equiv 0$ при $i > m$. Это линейное множество пространства Σ. Если $m_1 > m_2$, то $\Sigma_{m_1} \subset \Sigma_{m_2}$. Очевидно, что $\Sigma_m = \sum\limits_{i=0}^{m} \dot{+}\, S_i$ ($\dot{+}$ обозначает прямую сумму). Топология в Σ_m определяется, как и в прямой сумме топологических пространств. Так как операция вложения Σ_m в Σ_{m+1} непрерывна, то в пространстве Σ можно ввести топологию индуктивного предела, т. е. $\Sigma = \lim\limits_{m\to\infty} \operatorname{ind} \Sigma_m$.

Заметим, что каждое Σ_m является подпространством Σ_{m+1}, т. е. Σ_m замкнуто в Σ_{m+1}, и топология пространства Σ_m совпадает с топологией, которую Σ_{m+1} индуцирует в Σ_m. Поэтому $\Sigma = \lim\limits_{m\to\infty} \operatorname{ind} \Sigma_m$ является регулярным индуктивным пределом [11], т. е. всякое ограниченное множество в Σ принадлежит некоторому Σ_m и ограничено в нем. Если последовательность $f^{(n)}$ сходится к нулю в Σ, то в силу регулярности индуктивного предела существует такое m, что $f^{(n)} \in \Sigma_m$ и сходится к нулю в топологии пространства Σ_m.

Совокупность всех линейных непрерывных функционалов над пространством Σ обозначим Σ^*. В силу регулярности индуктивного предела Σ^* является проективным пределом пространств Σ_m^*, сопряженных к Σ_m: $\Sigma^* = \lim\limits_{m\to\infty} pr \Sigma_m^*$ [11]. Исходя из этого, можно записать общий вид линейного непрерывного функционала F в пространстве $\Sigma: \langle F, f \rangle = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \langle F_i, f_i \rangle$, где $f = \{f_0, f_1(x_1), \ldots, f_i(x_1, \ldots, x_i), \ldots\}$, $f_1 \in S_i$; $F = \{F_0, F_1, \ldots, F_i, \ldots\}$, $F_i \in S_i^*$ (S_i^* — сопряженное пространство к S_i).

Легко убедиться, что операция умножения в Σ непрерывна относительно введенной топологии, т. е. Σ — топологическое кольцо.

Линейный непрерывный функционал W над пространством Σ называется функционалом Уайтмана, если он обладает следующими свойствами.

1. W инвариантен относительно полной группы Лоренца, т. е. $\langle W, (a, \Lambda) f \rangle = \langle W, f \rangle$, $f \in \Sigma$.

2. W удовлетворяет условию спектральности, т. е. $\langle W, I_{\mathrm{sp}} \rangle = 0$.

3. W является положительно определенным, т. е. $\langle W, g^* \times g \rangle \geqslant 0$ для всех $g \in \Sigma$.

Из условия 3 следует, что

$$\langle W, g^* \rangle = \langle \overline{W, g} \rangle, \ |\langle W, g \times h \rangle|^2 \leqslant \langle W, g \times g^* \rangle \cdot \langle W, h^* \times h \rangle \qquad (g, h \in \Sigma). \tag{2}$$

Покажем теперь, как с помощью функционала W построить аксиоматическую теорию поля. Пусть Ω—множество тех $f \in \Sigma$, для которых $\langle W, f^* \times f \rangle = 0$. Из (2) вытекает, что Ω — подпространство пространства Σ, образующее левый идеал. Кроме того, ясно, что $I_{sp} \in \Omega$. Построим фактор-пространство $V = \Sigma/\Omega$. Его любой элемент $\hat{f}$ имеет вид $\hat{f} = f + \Omega$, где $f \in \Sigma$. Если элементу $f \in \Sigma$ сопоставить $\hat{f} = f + \Omega$, то получим естественное отображение пространства Σ в $V = \Sigma/\Omega$. Принимая за открытые множества в V образы открытых множеств в Σ, мы введем в V топологию, в которой оно становится локально-выпуклым счетно-полным пространством.

С помощью функционала W определим в V скалярное произведение $(\hat{f}, \hat{g}) = \langle W, f^* \times g \rangle$, $\hat{f} = f + \Omega$, $\hat{g} = g + \Omega$. Пополним V по этому скалярному произведению до гильбертова пространства H, которое можно рассматривать как пространство состояний (аксиома I п. **1**°). Элементы пространства V будем называть «хорошо определенными». Легко показать [5], что пространство H сепарабельно. Покажем, что над пространством H можно построить алгебру полевых операторов, удовлетворяющих аксиомам пункта **1**°.

Каждому $\varphi \in \Sigma$ сопоставим линейный оператор $A(\varphi)$, заданный на V следующим образом: $A(\varphi)\hat{f} = \widehat{\varphi \times f}$, $\varphi \in \Sigma$. Нетрудно проверить, что

$$A(\varphi_1 \times \varphi_2) = A(\varphi_1) A(\varphi_2), \quad (\hat{f}, A(\varphi)\hat{g}) = (A(\varphi^*)\hat{f}, \hat{g}).$$

Так как операция умножения в Σ непрерывна, то $(\hat{f}, A(\varphi)\hat{g})$, где $\varphi = \{0, \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n), 0, \ldots\}$. Все операторы $A(\varphi)$ имеют общую инвариантную область определения V, плотную в H, т. е. $A(\varphi)$ представляют полевые операторы аксиомы II п. **1**°, а V соответствует их области определения D.

Построим теперь представление полной группы Лоренца (a, Λ) в пространстве H. Сначала определим операторы $U(a, \Lambda)$ на пространстве V: $U(a, \Lambda)\hat{f} = \widehat{(a, \Lambda) f}$ $(\hat{f} \in V)$. В силу инвариантности множества Ω относительно полной группы Лоренца $U(a, \Lambda)$ является линейной операцией, заданной на V, удовлетворяющей соотношению $(U(a, \Lambda)\hat{g}, U(a, \Lambda)\hat{f}) = (\hat{g}, \hat{f})$, т. е. $U(a, \Lambda)$ — изометрический оператор. Так как $U^{-1}(a, \Lambda)$ существует, то $U(a, \Lambda)$ можно продолжить до унитарного оператора в пространстве H. Это продолжение обозначим тоже $U(a, \Lambda)$. Согласно определению $U(a, \Lambda)V \subset V$, и вследствие инвариантности относительно полной группы Лоренца функционала W имеем, что $U(a, \Lambda) A(\varphi) U^{-1}(a, \Lambda) = A[(a, \Lambda)\varphi]$, что равносильно аксиоме III п. **1**°.

Обозначим $\psi_0 = \{1, 0, 0, \ldots\}$. Легко видеть, что $U(a, \Lambda)\hat{\psi}_0 = \hat{\psi}_0$, а множество $\{A(\varphi)\hat{\psi}_0\}$ пробегает все V, когда φ пробегает все Σ, т. е. выполняется аксиома V п. **1**°.

3°. В этом пункте будет показано, что «хорошо определенные» состояния можно разложить по обобщенным собственным векторам операторов энергии-импульса. Так как теория поля описывается элементами $A(\varphi)\psi_0 \subset V$, где ψ_0 — вакуумное состояние, а $A(\varphi)$ — полевой оператор, соответствующий функции φ, то нас будет интересовать указанное разложение именно для векторов $\hat{f}$ из V.

Напомним [8], что линейный непрерывный функционал $F \in V^*$ (V^* — пространство сопряженное к V) называется общим обобщенным собственным вектором операторов A_j ($j = 0, 1, 2, \ldots, n$), если для любого j имеет место равенство

$$\langle A_j \hat{f}, F \rangle = \lambda_j \langle \hat{f}, F \rangle \quad (\hat{f} \in V). \tag{3}$$

Вектор $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ с λ_j ($j = 0, \ldots, n$), удовлетворяющими (3), называется общим собственным значением операторов A_j ($j = 0, 1, \ldots, n$).
Нам понадобится следующая общая теорема.

Теорема 1. *Пусть пространство X есть регулярный индуктивный предел счетно-нормированных ядерных пространств $X_n: X - \lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{ind} X_n$ и пусть в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, полученном пополнением по некоторому скалярному произведению $(.\,,.)$ фактор-пространства $Y = X/X_0$ (X_0 — некоторое подпространство X), т. е. $Y \subset \mathfrak{H} \subset Y^*$, задана конечная система $\{A_j\}$ самосопряженных коммутирующих в $\mathfrak{H}$ операторов, которые переводят Y в Y. Тогда $\{A_j\}$ допускает в Y^* полную систему собственных функционалов χ_λ:*

$$(\Psi, \Phi) = \int\limits_{R^n} \sum_{i=0}^{N_\lambda} \langle \chi_\lambda^{(i)}, \Psi \rangle \langle \chi_\lambda^{(i)}, \Phi \rangle \, d\sigma(\lambda), \tag{4}$$

где $\Psi, \Phi \in Y$, N_λ — кратность собственного значения λ, $d\sigma(\lambda)$ — некоторая положительная мера.

Поясним, что самосопряженные операторы A_1, A_2 в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ называются коммутирующими, если коммутируют их разложения единицы.

Для простоты изложения доказательство этой теоремы мы поместим в конце этого пункта.

Если в качестве пространства X взять пространство Σ, а вместо Y — пространство V и пополнить V с помощью функционала Уайтмана до пространства H, как указывалось в п. 2, то получим, что цепочка $V \subset H \subset V^*$ удовлетворяет условиям теоремы 1.

Роль операторов A_j в пространстве H будут играть операторы P_j ($j = 0, 1, 2, 3$) энергии-импульса, которые являются самосопряженными в H и коммутируют как инфинитезимальные операторы унитарного представления локально компактной коммутативной группы сдвигов. Легко также показать, что $P_j V \subset V$ ($j = 0, \ldots, 3$). Действительно, положим для определенности $j = 0$. Тогда $P_0 \hat{f} = \lim\limits_{a^0 \to 0} \dfrac{U(a^0, 0, 0, 0) - I}{a^0} \hat{f}$ в смысле пространства H. Так как последний предел существует и в смысле V и равен $\lim\limits_{a^0 \to 0} \dfrac{\widehat{(a^0, 1)} f - \hat{f}}{a^0} = \hat{f}' \in V$, где

$$f' = \left\{0, \frac{\partial f_1(x_1)}{\partial x_1^0}, \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1^0} + \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2^0}, \ldots \right\},$$

а топология пространства H слабее топологии V, то $P_0 \hat{f} = \hat{f}' \in V$.
Используя теорему 1, получаем следующий факт.

Теорема 2. *Всякий элемент $\hat{f} \in V$ можно разложить по общим собственным векторам χ_λ операторов энергии-импульса*

$$\hat{f} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{N_\lambda} \overline{\langle \chi_\lambda, \hat{f} \rangle} \chi_\lambda d\sigma(\lambda),$$

причем χ_λ образуют полную ортогональную систему общих обобщенных собственных векторов операторов P_j ($j = 0, 1, 2, 3$).

Принимая во внимание, что $\hat{f} = A(f)\psi_0$, получаем теперь основную формулу разложения:

$$(A(f)\psi_0, A(\varphi)\psi_0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{N_\lambda} \overline{\langle \chi_\lambda, A(f)\psi_0 \rangle} \langle \chi_\lambda A(\varphi)\psi_0 \rangle \, d\sigma(\lambda) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{N_\lambda} \langle \chi_\lambda, U^{-1}(x_1) U(x_1) A(f) U^{-1}(x_1) U(x_1)\psi_0 \rangle \cdot \langle \chi_\lambda, U^{-1}(x_2) U(x_2) \times$$

$$\times A(\varphi) U^{-1}(x_2) U(x_2)\psi_0 \rangle d\sigma(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{N_\lambda} e^{-i(x_1-x_2)\lambda} \langle \chi_\lambda, A(\widetilde{f})\psi_0 \rangle \times$$

$$\times \langle \chi_\lambda, A(\widetilde{\varphi})\psi_0 \rangle d\sigma(\lambda),$$

где $\widetilde{f} = (a, 1) f$, $\widetilde{\varphi} = (a, 1)\varphi$.

Доказательство теоремы 1. Достаточно установить, что если E_λ — спектральное разложение единицы в $\mathfrak{H}$, e — фиксированный элемент из $\mathfrak{H}$, а $\sigma(\lambda)$ — некоторая положительная мера, то существует производная

$$\frac{dE_\lambda}{d\sigma(\lambda)} = \chi_\lambda, \tag{5}$$

которая является линейным непрерывным функционалом в пространстве Y^* действующим по формуле $\langle \chi_\lambda, \varphi \rangle = \dfrac{d(E_\lambda, \varphi)}{d\sigma(\lambda)}$, где $\varphi \in J$.

Из условия теоремы следует, что $Y \subset \mathfrak{H} \subset Y^*$, т. е. $E_\lambda e \in Y^*$. Так как $Y = X/X_0$, то всякий непрерывный функционал над Y является непрерывным функционалом над X, равным нулю на X_0. Поэтому $E_\lambda e \in X^*$. В силу того, что X — регулярный индуктивный предел пространств X_n, X^* — проективный предел пространств X_n^* [11]:

$$X^* = \lim_{n\to\infty} pr\, X_m^*.$$

Исходя из свойств проективного предела, для существования $\dfrac{dE_\lambda}{d\sigma(\lambda)}$ в X^* достаточно установить существование $\dfrac{dP_n E_\lambda}{d\sigma(\lambda)}$ в пространстве X_n^*, где P_n — операция вложения X^* в X_n^*. Последнее вытекает из ядерности пространств X_n. Отсюда следует (5), т. е. $\dfrac{dE_\lambda}{d\sigma(\lambda)}$ — непрерывный функционал в пространстве Y. Используя последний факт, доказательство можно провести буквально по той же схеме, что и в [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. A. S. Wightman, Phys. Rev., **101**, 1956, 860.
2. A. S. Wightman, Les Problemes Math. de la Theorie Quautique ges Champs, Quai Anatole — France — Paris, 1959.
3. A. Uhlmann, Ann. Phys., **13**, 1961, 433.
4. R. Jost and K. Hepp, Helv. Phys. Acta, **35**, 1962, 34.
5. H. J. Borchers, Nuovo Cim., **24**, 1962, 214.
6. М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., **7**, 1943, 237.
7. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, Обобщенные функции, вып. 3, Физматгиз М., 1958.

8. И. М. Гельфанд и И. Я. Виленкин, Обобщенные функции, вып. 4, Физматгиз, М., 1961.
9. Н. Н. Боголюбов, Б. В. Медведев, М. К. Поливанов, Вопросы теории дисперсионных соотношений, Физматгиз, М., 1958.
10. Ю. М. Березанский, Матем. сб., 43, 1957, 75.
11. Л. В. Канторович и Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Гостехиздат, М.—Л., 1959.
12. К. Maurin, Bull. Acad. Polon sci., serie math., astr, et phys., 6. 1959, 471.

Поступила 29.XI 1962 г.
Киев