Об отображении Клифорда кривых и поверхностей в эллиптическом пространстве

Б. С. Вакарчук

В статье рассматривается отображение Клифорда кривых и поверхностей эллиптического пространства. По свойствам отображения выделяются некоторые классы кривых и поверхностей.

1. Рассмотрим в эллиптическом пространстве кривую, заданную в нормированных вейерштрассовых координатах параметрическими уравнениями

$$x^i = x^i(s) \qquad (i = 0, 1, 2, 3), \tag{1}$$

где параметр s — длина дуги; $\sum\limits_{k=0}^{3} x^{i2} = 1$.

Обозначим через α^i, β^i и λ^i соответственно направляющие коэффициенты касательной, главной нормали и бинормали кривой (1). Отметим, что эти направляющие коэффициенты являются соответственно координатами полюсов нормальной, спрямляющей и соприкасающейся плоскостей рассматриваемой кривой.

Через точку (0, 0, 0, 1) — начало координат для каждой касательной кривой (1) — проводим 2 параллели Клифорда, одна из которых является право-параллельной, а другая — лево-параллельной. Эти прямые параллели в пересечении с полярной плоскостью, соответствующей началу координат, определяют две кривые, которые называем индикатрисами касательных. Таким же образом строятся индикатрисы главных нормалей и бинормалей.

Пусть t^k, n^k, b^k $(k = 1, 2, 3)$ — соответственно координаты точек индикатрис касательных, главных нормалей и бинормалей, соответствующих право-параллелям Клифорда, а $\overset{*}{t}{}^k$, $\overset{*}{n}{}^k$, $\overset{*}{b}{}^k$ — координаты точек индикатрис, соответствующих лево-параллелям.
Тогда имеем [1]:

$$\begin{gathered} t^1 = \begin{vmatrix} x^0 & \alpha^0 \\ x^1 & \alpha^1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & \alpha^2 \\ x^3 & \alpha^3 \end{vmatrix}, \ t^2 = \begin{vmatrix} x^0 & \alpha^0 \\ x^2 & \alpha^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^3 & \alpha^3 \\ x^1 & \alpha^1 \end{vmatrix}, \ t^3 = \begin{vmatrix} x^0 & \alpha^0 \\ x^3 & \alpha^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^1 & \alpha^1 \\ x^2 & \alpha^2 \end{vmatrix}; \\ \overset{*}{t}{}^1 = \begin{vmatrix} x^0 & \alpha^0 \\ x^1 & \alpha^1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^2 & \alpha^2 \\ x^3 & \alpha^3 \end{vmatrix}, \ \overset{*}{t}{}^2 = \begin{vmatrix} x^0 & \alpha^0 \\ x^2 & \alpha^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^3 & \alpha^3 \\ x^1 & \alpha^1 \end{vmatrix}, \ \overset{*}{t}{}^3 = \begin{vmatrix} x^0 & \alpha^0 \\ x^3 & \alpha^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^1 & \alpha^1 \\ x^2 & \alpha^2 \end{vmatrix}. \end{gathered} \tag{2}$$

Выражения для n^k и b^k, $\overset{*}{h}{}^k$, $\overset{*}{b}{}^k$ $(k = 1, 2, 3)$ получаем из (2), заменяя соответственно α^k через β^k и λ^k.

Заметим, что t^k, b^k, n^k являются направляющими коэффициентами право-параллельных прямых соответственно к касательным, бинормалям и главным нормалям кривой (1); $\overset{*}{t}^k$, $\overset{*}{b}^k$, $\overset{*}{n}^k$ — направляющие коэффициенты лево-параллельных прямых к тем же прямым. Производные от t^k, n^k и b^k по параметру s выражаются через эти же величины так [1]:

$$\frac{dt^k}{ds} = Kn^k, \ \frac{dn^k}{ds} = -Kt^k - \left(\varkappa - \frac{1}{r}\right)b^k, \ \frac{db^k}{ds} = \left(\varkappa - \frac{1}{r}\right)n^k, \qquad (3)$$

где K — кривизна, а $\varkappa$ — кручение кривой (1), r — радиус кривизны пространства. Аналогичные формулы имеют место и для производных от $\overset{*}{t}^k$, $\overset{*}{b}^k$ и $\overset{*}{n}^k$:

$$\frac{d\overset{*}{t}^k}{ds} = K\overset{*}{n}^k, \ \frac{d\overset{*}{n}^k}{ds} = -K\overset{*}{t}^k - \left(\varkappa + \frac{1}{r}\right)\overset{*}{b}^k, \ \frac{d\overset{*}{b}^k}{ds} = \left(\varkappa + \frac{1}{r}\right)\overset{*}{n}^k \quad (k = 1, 2, 3); \qquad (3^*)$$

формулы (3) и (3*) установлены Фубини [1].

2. Используя формулы, Фубини, рассмотрим свойства индикатрис и выделим некоторые классы кривых эллиптического пространства. Так как определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} t^1 & t^2 & t^3 \\ n^1 & n^2 & n^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}, \qquad \overset{*}{\Delta} = \begin{vmatrix} \overset{*}{t}{}^1 & \overset{*}{t}{}^2 & \overset{*}{t}{}^3 \\ \overset{*}{n}{}^1 & \overset{*}{n}{}^2 & \overset{*}{n}{}^3 \\ \overset{*}{b}{}^1 & \overset{*}{b}{}^2 & \overset{*}{b}{}^3 \end{vmatrix}$$

ортогональны, то точки индикатрис, соответствующие одному и тому же значению параметра s, взаимно полярны. В дальнейшем будем рассматривать индикатрисы, связанные с право-параллельностью Клиффорда. Проведенные в этом случае рассуждения переносятся без каких-либо изменений на индикатрисы, связанные с лево-параллельностью.

На индикатрисе касательных возьмем произвольную точку $T(s)$. Пусть $B(s)$ и $N(s)$ — соответствующие ей точки, лежащие соответственно на индикатрисах бинормалей и главных нормалей. Из первой и третьей формул (3) следует, что нормаль индикатрисы касательных в точке $T(s)$ совпадает с нормалью индикатрисы бинормалей в точке $B(s)$. Обозначим эту нормаль так: $T \times B$. Далее, так как точки $T(s)$, $B(s)$ и $N(s)$ взаимно полярны, то точка $N(s)$ является полюсом нормали $T \times B$. Следовательно, касательные, проведенные к индикатрисе касательных в точке $T(s)$, и индикатрисы бинормалей в точке $B(s)$ проходят через точку $N(s)$.

Обозначим через P полюс нормали индикатрисы главных нормалей в точке $N(s)$, а через Q — полюс касательной этой же индикатрисы в той же точке. Для координат p^k точки P имеем

$$p^k = \frac{-Kt^k + \left(\varkappa - \frac{1}{r}\right)b^k}{\sqrt{K^2 + \left(\varkappa - \frac{1}{r}\right)^2}} \quad (k = 1, 2, 3); \qquad (4)$$

координаты q^k точки Q равны:

$$q^k = \frac{\left(\varkappa - \frac{1}{r}\right)t^k + Kb^k}{\sqrt{K^2 + \left(\varkappa - \frac{1}{r}\right)^2}} \quad (k = 1, 2, 3). \qquad (5)$$

Точки P и Q взаимно полярны, так как $\sum\limits_{k=1}^{3} p^k q^k = 0$, и гармонически сопряжены относительно точек T и B.

Рассмотрим теперь некоторые кривые.

1) Пусть $\varkappa = \frac{1}{r}$. Тогда из третьей формулы (3) следует, что $b^k = \text{const}$. При этом бинормали рассматриваемой кривой право-параллельны некоторой прямой, проходящей через начало координат. Кривые, обладающие тем свойством, что $\varkappa = \pm \frac{1}{r}$, изучены Л. Бианки [1].

2) Рассмотрим кривую, для которой право-параллельные прямые, соответствующие ее касательным, образуют постоянный угол с некоторой прямой, проходящей через начало координат. Для этой кривой индикатриса касательных есть окружность либо ее дуга. Найдем необходимые и достаточные условия, которые накладываются на натуральные уравнения рассматриваемой кривой. Обозначим через A^1, A^2, A^3, $\sum\limits_{k=1}^{3} A^{k^2} = 1$ направляющие коэффициенты заданной прямой. Тогда должны иметь

$$\sum_{k=1}^{3} A^k t^k = a, \ a \text{ — const}, \ |a| < 1. \tag{6}$$

Если продифференцируем соотношения (6) по s, после чего производные от t^k заменим правой частью формул Фубини, то получим

$$K \sum_{k=1}^{3} A^k n^k = 0.$$

Исключая из рассмотрения прямые, для которых $K = 0$, получаем

$$\sum_{k=1}^{3} A^k n^k = 0. \tag{7}$$

Из этого соотношения вытекает, что индикатриса главных нормалей является прямой полярной точки с координатами A^1, A^2, A^3. Продифференцировав соотношения (7) и заменив $\frac{dn^k}{ds}$ правой частью формул (3), придем к равенству

$$K \sum_{k=1}^{3} A^k t^k + \left(\varkappa - \frac{1}{r}\right) \sum_{k=1}^{3} A^k b^k = 0;$$

учитывая, что $\sum\limits_{k=1}^{3} A^k t^k = a$, получаем

$$aK + \left(\varkappa - \frac{1}{r}\right) \sum_{k=1}^{3} A^k b^k = 0.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{3} A^k b^k = \frac{aK}{\varkappa - \frac{1}{r}}. \tag{8}$$

Если продифференцировать это соотношение и учесть формулы (3) и равенство (7), то получим, что

$$\left(\frac{aK}{\varkappa-\frac{1}{r}}\right)'=0.$$

Интегрируя, находим:

$$\frac{aK}{\varkappa-\frac{1}{r}}=c_1, \text{ или } \frac{K}{\varkappa-\frac{1}{r}}=\frac{c_1}{a}, \tag{9}$$

где c_1 — постоянная интегрирования.

Наоборот, если K и $\varkappa$ связаны соотношением (9), то индикатриса касательных есть окружность или ее дуга. Действительно, если подсчитать кривизну K_t индикатрисы касательных, то получаем:

$$K_t=\frac{\varkappa-\frac{1}{r}}{K}.$$

Отсюда видно, что при условии (9) K_t постоянно и, следовательно, индикатриса касательных есть окружность либо ее дуга.

Кривые, для которых кривизна и кручение связаны соотношением (9), называются винтовыми линиями эллиптического пространства. Эти линии являются изогональными траекториями одного из семейств образующих поверхностей Клиффорда.

Таким образом, получаем, что кривые, для которых индикатриса касательных есть окружность (или ее дуга), являются винтовыми линиями.

Отметим, что из равенства (8) при условии (9) следует, что индикатриса бинормалей винтовых линий есть окружность или ее дуга.

Возьмем на нормали $T\times B$ произвольную точку A. Тогда, как показывают вычисления, для винтовых линий двойные отношения четверок точек T, B, P, A и T, B, Q, A постоянны.

Учитывая выражения (4) и (5) для координат точек P и Q, находим, что

$$\cos\frac{PT}{r}=\sum_{k=1}^{3}t^kp^k=\frac{-K}{\sqrt{K^2+\left(\varkappa-\frac{1}{r}\right)^2}}, \tag{10}$$

$$\cos\frac{PB}{r}=\sum_{k=1}^{3}b^kp^k=\frac{\varkappa-\frac{1}{r}}{\sqrt{K^2+\left(\varkappa-\frac{1}{r}\right)^2}}, \tag{10$'$}$$

$$\cos\frac{QT}{r}=\sum_{k=1}^{3}q^kt^k=\frac{\varkappa-\frac{1}{r}}{\sqrt{K^2+\left(\varkappa-\frac{1}{r}\right)^2}}, \tag{11}$$

$$\cos\frac{QB}{r}=\sum_{k=1}^{3}q^kb^k=\frac{K}{\sqrt{K^2+\left(\varkappa-\frac{1}{r}\right)^2}}. \tag{11$'$}$$

Из (10) и (10′) или (11) и (11′) следует, что кривизна и кручение кривых, для которых $\cos\frac{PT}{r}\cos\frac{PB}{r}=c$, c—const, или $\cos\frac{QT}{r}\cos\frac{QB}{r}=\mathrm{const}$, связаны соотношением

$$K\left(\varkappa-\frac{1}{r}\right)=-c\left[K^2+\left(\varkappa-\frac{1}{r}\right)^2\right].$$

Если $c=-\frac{1}{2}$, то имеем снова винтовую линию.

Отметим, что винтовые линии характеризуются еще тем, что $c_1\cos\frac{PT}{r}+$ $+c_2\cos\frac{PB}{r}=0$, где c_1, c_2 — некоторые постоянные.

3) Для кривых, индикатриса главных нормалей которых есть окружность или ее дуга, кривизна и кручение связаны соотношением

$$\varkappa-\frac{1}{r}=\left[\frac{K^2+\varkappa-\frac{1}{r}}{\frac{-K'}{K}\left(\varkappa-\frac{1}{r}\right)+\varkappa'}\right]'.$$

К этому натуральному уравнению кривой мы приходим, проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше.

В евклидовом пространстве рассмотрим три вектора $\bar{t}(t^1,\ t^2,\ t^3)$, $\bar{n}(n^1,\ n^2,\ n^3)$, $\bar{b}(b^1,\ b^2,\ b^3)$. Так как определитель Δ ортогональный, то эти векторы единичны и ортогональны. Если считать $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$ как векторы естественного трехгранника, то соотношения (3) определяют некоторую евклидову кривую (C), кривизна которой равна K, а кручение равно $\varkappa-\frac{1}{r}$. Таким же образом (3′) определяют кривую (C^*) с кривизной, равной K и кручением, равным $\varkappa+\frac{1}{r}$. Для обеих кривых параметр s будет длиной дуги. Эти утверждения составляют содержание известной теоремы Фубини [1]. По этой теореме винтовым линиям эллиптического пространства соответствуют линии откоса евклидового пространства. В частности, кривым, расположенным в плоскости, соответствуют кривые постоянного кручения в евклидовом пространстве. Все эти кривые представляются уравнением [2]

$$\bar{X}=\frac{1}{\varkappa}\int\limits_0^t[\bar{l}d\bar{l}],$$

где $\bar{l}\ (t)$ — произвольный единичный вектор.

Окружности в эллиптической плоскости соответствует винтовая линия евклидового пространства. Таким образом, изучение кривых эллиптического пространства с помощью формул Фубини сводится к изучению пары евклидовых кривых (C) и (C^*), разность между кручениями которых равна $\frac{2}{r}$.

Следует отметить, что если величины K и $\varkappa\pm\frac{1}{r}$ кривой (1) связаны некоторым соотношением, то этому же соотношению будут удовлетворять кривизна и кручение евклидовой кривой, соответствующей вышеуказанным образом кривой (1).

3. Рассмотрим теперь в эллиптическом пространстве некоторую поверхность, заданную параметрическими уравнениями

$$x^i = x^i(u^1, u^2) \quad (i = 0, 1, 2, 3), \quad \sum_{i=1}^{3} x^{i^2} = 1. \tag{12}$$

Через ξ^i обозначим полюсы касательных плоскостей поверхности (12). Тогда параметрические уравнения нормали в произвольной точке (u^1, u^2) поверхности запишутся в виде

$$X^i = x^i(u^1, u^2) \cos\frac{t}{r} + \xi^i(u^1, u^2) \sin\frac{t}{r} \quad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{13}$$

Через начало координат для каждой нормали поверхности проведем две параллели Клиффорда. Эти прямые — параллели в пересечении с полярной плоскостью (Π), соответствующей началу координат, — определят два отображения поверхности (12). Обозначим через y^k координаты точек отображения соответствующего право-параллелям, а через $\overset{*}{y}{}^k$ — координаты точек отображения, соответствующего лево-параллелям. Тогда получим

$$y^1 = \begin{vmatrix} x^0\xi^0 \\ x^1\xi^1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2\xi^2 \\ x^3\xi^3 \end{vmatrix}, \quad y^2 = \begin{vmatrix} x^0\xi^0 \\ x^2\xi^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^3\xi^3 \\ x^1\xi^1 \end{vmatrix}, \quad y^3 = \begin{vmatrix} x^0\xi^0 \\ x^3\xi^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^1\xi^1 \\ x^2\xi^2 \end{vmatrix}; \tag{14}$$

$$\overset{*}{y}{}^1 = \begin{vmatrix} x^0\xi^0 \\ x^1\xi^1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^2\xi^2 \\ x^3\xi^3 \end{vmatrix}, \quad \overset{*}{y}{}^2 = \begin{vmatrix} x^0\xi^0 \\ x^2\xi^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^3\xi^3 \\ x^1\xi^1 \end{vmatrix}, \quad \overset{*}{y}{}^3 = \begin{vmatrix} x^0\xi^0 \\ x^3\xi^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x^1\xi^1 \\ x^2\xi^2 \end{vmatrix}. \tag{14'}$$

Изучим отображение поверхности (12), определяемое формулами (14).

Линейный элемент отображения (14) обозначим через $d\sigma^2$. Имеем:

$$d\sigma^2 = dy^{1^2} + dy^{2^2} + dy^{3^2} = \gamma_{ij} du^i du^j,$$

где

$$\gamma_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial y^k}{\partial u^i} \frac{\partial y^k}{\partial u^j} \quad (i, j = 1, 2).$$

Пусть g_{ij} и b_{ij} являются соответственно коэффициентами первой и второй квадратических форм поверхности (12). Проводя несложные вычисления, находим, что метрические коэффициенты отображения (14) имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= g_{11}\left(\frac{1}{r^2} - K_0\right) - Hb_{11} - \frac{\sqrt{g}}{r} b^2_1, \\ \gamma_{12} &= g_{12}\left(\frac{1}{r^2} - K_0\right) - Hb_{12} - \frac{\sqrt{g}}{r} (b^1_1 - b^2_2), \\ \gamma_{22} &= g_{22}\left(\frac{1}{r^2} - K_0\right) - Hb_{22} - \frac{\sqrt{g}}{r} b^1_2. \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь K_0 — относительная полная кривизна, а H — средняя кривизна поверхности (12), $g = g_{11}g_{22} - g^2_{12}$, $b^i_j = g^{i\alpha} b_{\alpha j}$.

Чтобы получить выражения для метрических коэффициентов $\overset{*}{\gamma}_{ij}$ отображения (14′), надо в (15) перед последними слагаемыми взять знак плюс.

С помощью формул (15) легко установить, что на всякой поверхности омбилические точки служат точками конформности отображения.

Конформное отображение допускают минимальные поверхности, отнесенные к асимптотическим линиям. Действительно, пусть поверхность (12) является минимальной, на которой координатная сеть совпадает с сетью асимптотических линий. Тогда для этой поверхности $b_{11} = b_{22} = g_{12} = 0$; $H = 0$, $K_0 < 0$. Формулы (15) для минимальной поверхности принимают вид

$$\gamma_{11} = g_{11}\left(\frac{1}{r^2} - K_0 + \frac{\sqrt{-K_0}}{r^2}\right),$$

$$\gamma_{12} = 0,$$

$$\gamma_{22} = g_{22}\left(\frac{1}{r^2} - K_0 + \frac{\sqrt{-K_0}}{r^2}\right).$$

Отсюда видно, что отображение минимальных поверхностей, отнесенных к асимптотическим линиям, конформно. При этом асимптотические линии отображаются в ортогональную сеть на плоскости (Π). Если на поверхности (12) линии u^1 и u^2 являются линиями кривизны, то для γ_{ij} имеем

$$\begin{aligned}
\gamma_{11} &= \left(\frac{1}{r^2} - K_0\right) g_{11} - Hb_{11},\\
\gamma_{12} &= \frac{\sqrt{g_{11}g_{22}}}{r}\left(\frac{b_{22}}{g_{22}} - \frac{b_{11}}{g_{11}}\right),\\
\gamma_{22} &= \left(\frac{1}{r^2} - K_0\right) g_{22} - Hb_{22}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Положим $\gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 = \gamma$. Тогда, учитывая формулы (16), находим, что

$$\gamma = \left(\frac{1}{r^2} + K_0\right)^2 g; \tag{17}$$

здесь $g = g_{11}g_{22}$.

Рассмотрим поверхность Клиффорда, для которой $K_0 = -\frac{1}{r^2}$. Из соотношения (17) следует, что для этой поверхности $\gamma = 0$.

Таким образом, поверхность Клиффорда отображается в кривую. Для развертывающихся поверхностей ($K_0 = 0$) γ пропорционально g. Геометрически это означает, что площади областей на развертывающихся поверхностях пропорциональны площадям соответствующих областей отображения.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, vol. II, p 11, Bologna, 1924,
2. М. Я. Выгодский, Дифференциальная геометрия, Гостехиздат, М., 1949.

Поступила 20.V 1961 г.
Черновицы