Нежесткие ребристые поверхности с краем

Г. Н. Чернис

Ребристой поверхностью вращения S будем называть поверхность, меридиан которой составлен из прямолинейных отрезков. Если меридиан поверхности S составлен из n прямолинейных отрезков, то такую поверхность в дальнейшем будем обозначать через S_n.

С. Э. Кон-Фоссен [1] построил пример нежесткой замкнутой поверхности S_4, допускающей лишь одно линейно независимое поле бесконечно малых изгибаний. Б. А. Бублик [2] рассмотрел примеры нежестких ребристых поверхностей, которые допускают два и три линейно независимые поля бесконечно малых изгибаний. Он же получил необходимое и достаточное условие нежесткости поверхности S_3, а также доказал теорему о том, что если замкнутая ребристая поверхность вращения допускает n линейно независимых полей бесконечно малых изгибаний, то ее меридиан составлен не меньше чем из $n+2$ отрезков.

Ниже рассматриваются бесконечно малые изгибания скольжения поверхностей S_n. Доказано, что на некоторых поверхностях S_n существует счетное множество параллелей, отсекающих от S_n нежесткие относительно бесконечно малых изгибаний скольжения поверхности $S_n^{(k)}$ $(k = 2, 3, 4, \ldots)$. Показано, что: 1) если один из концов меридиана поверхности S_n лежит на оси вращения, то такая поверхность может допускать не больше чем $n-1$ линейно независимых полей изгибаний; 2) если же меридиан поверхности S_n не имеет общих точек с осью вращения, то такая поверхность может допускать не больше чем n линейно независимых полей бесконечно малых изгибаний скольжения. Построен пример нежесткой двусвязной ребристой поверхности S_2, которая допускает два линейно независимые поля изгибаний скольжения с номерами $k_1 = 2$, $k_2 = 3$.

1. Рассмотрим бесконечно малые изгибания скольжения ребристой поверхности S_n, один из концов меридиана которой лежит на оси вращения. Уравнение меридиана такой поверхности можно представить в виде

$$r(u) = \begin{cases} b_1 u, & 0 \leqslant u \leqslant u_1, \\ b_2 u + (b_1 - b_2) u_1, & u_1 \leqslant u \leqslant u_2 \\ b_3 u + (b_1 - b_2) u_1 + (b_2 - b_3) u_2, & u_2 \leqslant u \leqslant u_3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ b_n u + (b_1 - b_2) u_1 + (b_2 - b_3) u_2 + \ldots + (b_{n-1} - b_n) u_{n-1}, & u_{n-1} \leqslant u \leqslant u_n, \end{cases} \tag{1}$$

где $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n$ — угловые коэффициенты звеньев ломаной.

Отнесем радиус-вектор $\vec{r}(u, v)$ поверхности S_n и вектор соответствующего ей поля изгибания $\vec{z}(u, v)$ к подвижному трехграннику $\vec{e}$, $\vec{a}(v)$, $\vec{a}'(v)$ [1]:

$$\vec{r}(u, v) = u\vec{e} + r(u)\vec{a}(v),$$

$$\vec{z}(u, v) = \alpha(u, v)\vec{e} + \beta(u, v)\vec{a}(v) + \gamma(u, v)\vec{a}'(v),$$

где $\vec{e}$ — единичный вектор оси вращения, а $\vec{a}(v)$ — единичный вектор, перпендикулярный к $\vec{e}$.

Основное уравнение бесконечно малых изгибаний $d\vec{r}d\vec{z} = 0$ в этом случае приводится к системе линейных однородных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \alpha_u + r'(u)\beta_u = 0 \\ \beta + \gamma_v = 0 \\ \alpha_v + r'(u)(\beta_v - \gamma) + r(u)\gamma_u = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Для поверхности вращения $\alpha(u, v)$, $\beta(u, v)$, $\gamma(u, v)$ являются периодическими функциями от v. Разложив их в ряды Фурье и приняв во внимание систему (2), для коэффициентов Фурье $\gamma_{k1}(u)$ и $\gamma_{k2}(u)$ функции $\gamma(u, v)$, получим следующее дифференциальное уравнение

$$r(u)\gamma''_{ki}(u) + (k^2 - 1)r''(u)\gamma_{ki}(u) = 0, \qquad i = 1,2. \tag{3}$$

Каждому регулярному и не равному тождественно нулю интегралу $\gamma_{ki}(u)$ уравнения (3) при $k \geqslant 2$ отвечает нетривиальное дважды непрерывно дифференцируемое поле бесконечно малых изгибаний поверхности S_n.

Теорема 1. *Для того чтобы ребристая поверхность вращения S_n была нежесткой по отношению к бесконечно малым изгибаниям, при которых край $u = u_n$ скользит по круговому конусу K_α с вершиной на оси поверхности и углом 2α при вершине, необходимо и достаточно, чтобы характеризующие ее параметры при целых $k \geqslant 2$ удовлетворяли условию*

$$u_n^{(k)} = \frac{1}{k^2(b_n + \operatorname{ctg}\alpha)}\left\{\frac{\Delta_2}{\Delta_1} - \sum_{j=1}^{n}(b_{j-1} - b_j)u_{j-1} + [b_n(k^2 - 1) + k^2\operatorname{ctg}\alpha]u_{n-1}\right\}, \tag{4}$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \frac{u_1(b_2 - b_1)(k^2 - 1)}{b_1u_1} - 1 & 1 & \dots & 0 \\ \frac{u_1(b_3 - b_2)(k^2 - 1)}{b_2u_2 + (b_1 - b_2)u_1} & \frac{(u_2 - u_1)(b_3 - b_2)(k^2 - 1)}{b_2u_2 + (b_1 - b_2)u_1} - 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{u_1(b_n - b_{n-1})(k^2 - 1)}{b_{n-1}u_{n-1} + \sum\limits_{i=1}^{n-1}(b_{j-1} - b_j)u_{j-1}} & \frac{(u_2 - u_1)(b_n - b_{n-1})(k^2 - 1)}{b_{n-1}u_{n-1} + \sum\limits_{j=1}^{n-1}(b_{j-1} - b_j)u_{j-1}} & \dots & \frac{(u_{n-1} - u_{n-2})(b_n - b_{n-1})(k^2 - 1)}{b_{n-1}u_{n-1} + \sum\limits_{j=1}^{n-1}(b_{j-1} - b_j)u_{j-1}} - 1 \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{u_1(b_2-b_1)(k^2-1)}{b_1u_1} - 1 & 1 & \dots & 0 \\ \frac{u_1(b_3-b_2)(k^2-1)}{b_2u_2+(b_1-b_2)u_1} & \frac{(u_2-u_1)(b_3-b_2)(k^2-1)}{b_2u_2+(b_1-b_2)u_1} - 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1[b_n(k^2-1)+k^2\operatorname{ctg}\alpha] & (u_2-u_1)[b_n(k^2-1)+k^2\operatorname{ctg}\alpha] & \dots & \dots (u_{n-1}-u_{n-2})[b_n(k^2-1)+k^2\operatorname{ctg}\alpha] \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Пусть $\vec{z}^{(j)}(u, v)$, $j = 1, 2, \dots, n$, есть значения изгибающего поля $\vec{z}(u, v)$ поверхности S_n на ее регулярных частях. Для того чтобы $\vec{z}$ было непрерывно на всей поверхности S_n, необходимо, чтобы:

1) в точках излома меридиана выполнялись условия

$$\gamma_{ki}^{(j-1)}(u_{j-1}) = \gamma_{ki}^{(j)}(u_{j-1}), \tag{5}$$

$$\gamma'_{ki}(u)\Big|_{u_{j-1}-0}^{u_{j-1}+0} = -(k^2-1)\frac{\gamma_{ki}(u_{j-1})}{r(u_{j-1})} r'(u)\Big|_{u_{j-1}-0}^{u_{j-1}+0}; \tag{6}$$

2) в полюсе поверхности S_n

$$\gamma_{ki}^{(1)}(0) = 0, \tag{7}$$

где $\gamma_{ki}^{(j)}(u)$ — коэффициенты Фурье координаты $\gamma^{(j)}(u, v)$ поля $\vec{z}^{(j)}(u, v)$.

Из уравнения (3), принимая во внимание (1), (5) и (7), получим:

$$\gamma_{ki}(u) = \begin{cases} A_{i1}u, & 0 \leqslant u \leqslant u_1, \\ A_{i2}u + (A_{i1}-A_{i2})u_1, & u_1 \leqslant u \leqslant u_2, \\ A_{i3}u + (A_{i1}-A_{i2})u_1 + (A_{i2}-A_{i3})u_2, & u_2 \leqslant u \leqslant u_3, \\ \dots & \\ A_{in}u + (A_{i1}-A_{i2})u_1 + (A_{i2}-A_{i3})u_2 + \dots + (A_{in-1}-A_{in})u_{n-1}, & \\ \qquad u_{n-1} \leqslant u \leqslant u_n, & \end{cases} \tag{8}$$

где $A_{i1}, A_{i2}, A_{i3}, \dots, A_{in}$ — произвольные постоянные.

Так как $\gamma_{ki}(u)$ должны удовлетворять и условию (6), то на A_{ij} накладываются следующие ограничения:

$$\begin{cases} A_{i1}\left[\frac{u_1(b_2-b_1)(k^2-1)}{b_1u_1} - 1\right] + A_{i2} = 0, \\ A_{i1}\frac{u_1(b_3-b_2)(k^2-1)}{b_2u_2+(b_1-b_2)u_1} + A_{i2}\left[\frac{(u_2-u_1)(b_3-b_2)(k^2-1)}{b_2u_2+(b_1-b_2)u_1} - 1\right] + A_{i3} = 0, \\ \dots \\ A_{i1}\frac{u_1(b_n-b_{n-1})(k^2-1)}{b_{n-1}u_{n-1}+\sum_{j=1}^{n-1}(b_{j-1}-b_j)u_{j-1}} + \\ \quad + A_{i2}\frac{(u_2-u_1)(b_n-b_{n-1})(k^2-1)}{b_{n-1}u_{n-1}+\sum_{j=1}^{n-1}(b_{j-1}-b_j)u_{j-1}} + \dots + A_{in} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Для того чтобы край $u = u_n$ скользил по конусу K_α, необходимо, чтобы для $\gamma_{ki}(u)$ при $u = u_n$ имело место еще условие [3]

$$r(u_n)\gamma'_{ki}(u_n) + r'(u_n)(k^2 - 1)\gamma_{ki}(u_n) + k^2\gamma_{ki}(u_n)\operatorname{ctg}\alpha = 0. \tag{10}$$

Из равенства (10), учитывая (1) и (8), получаем

$$A_{i1}\frac{u_1[b_n(k^2-1)+k^2\operatorname{ctg}\alpha]}{b_nu_n+\sum\limits_{j=1}^{n}(b_{j-1}-b_j)u_{j-1}} + A_{i2}\frac{(u_2-u_1)[b_n(k^2-1)+k^2\operatorname{ctg}\alpha]}{b_nu_n+\sum\limits_{j=1}^{n}(b_{j-1}-b_j)u_{j-1}} + \ldots +$$

$$+ A_{in}\left[1 + (u_n - u_{n-1})\frac{b_n(k^2-1)+k^2\operatorname{ctg}\alpha}{b_nu_n+\sum\limits_{j=1}^{n}(b_{j-1}-b_j)u_{j-1}}\right] = 0. \tag{11}$$

Принимая во внимание (9) и (11), легко убедиться, что поверхность S_n будет нежесткой тогда и только тогда, когда характеризующие ее параметры при целых $k \geqslant 2$ удовлетворяют условию

$$\begin{vmatrix}
\dfrac{u_1(b_2-b_1)(k^2-1)}{b_1u_1} - 1 & 1 & \ldots & 0 \\
\dfrac{u_1(b_3-b_2)(k^2-1)}{b_2u_2+(b_1-b_2)u_1} & \dfrac{(u_2-u_1)(b_3-b_2)(k^2-1)}{b_2u_2+(b_1-b_2)u_1} - 1 & \ldots & 0 \\
\cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\
\dfrac{u_1(b_n-b_{n-1})(k^2-1)}{b_{n-1}u_{n-1}+\sum\limits_{j=1}^{n-1}(b_{j-1}-b_j)u_{j-1}} & \dfrac{(u_2-u_1)(b_n-b_{n-1})(k^2-1)}{b_{n-1}u_{n-1}+\sum\limits_{j=1}^{n-1}(b_{j-1}-b_j)u_{j-1}} & \ldots & 1 \\
\dfrac{u_1[b_n(k^2-1)+k^2\operatorname{ctg}\alpha]}{b_nu_n+\sum\limits_{j=1}^{n}(b_{j-1}-b_j)u_{j-1}} & \dfrac{(u_2-u_1)[b_n(k^2-1)+k^2\operatorname{ctg}\alpha]}{b_nu_n+\sum\limits_{j=1}^{n}(b_{j-1}-b_j)u_{j-1}} & \ldots & 1 + \dfrac{(u_n-u_{n-1})[b_n(k^2-1)+k^2\operatorname{ctg}\alpha]}{b_nu_n+\sum\limits_{j=1}^{n}(b_{j-1}-b_j)u_{j-1}}
\end{vmatrix} = 0. \tag{12}$$

Поскольку равенство (12) эквивалентно равенству (4), то этим самым теорема доказана.

Как следствие из этой теоремы имеем:

Теорема 2. *На нежесткой ребристой поверхности S_n, меридиан которой есть ломаная, имеющая с осью вращения лишь одну общую конечную точку, существует счетное множество параллелей $u_n^{(\kappa)}$, отсекающих от S_n нежесткие по отношению к бесконечно малым изгибаниям скольжения по конусу K_α поверхности $S_n^{(\kappa)}$; и $u_n^{(k)} \to u_{n-1}$ при $k \to \infty$.*

Замечание 1. Соотношение (4) в явном виде указывает нам счетное множество параллелей $u = u_n^{(k)}$, которые от поверхности S_n отсекают поверхности $S_n^{(\kappa)}$, нежесткие по отношению к бесконечно малым изгибаниям, в процессе которых край $u = u_n^{(\kappa)}$ скользит по наперед заданному конусу K_α. Интересно отметить, что, в отличие от гладких поверхностей вращения отрицательной кривизны, множество $\{u_n^{(\kappa)}\}$ не всюду плотно [4].

З а м е ч а н и е 2. Поскольку (12) является уравнением n-го порядка относительно k^2 и $k=0$ его удовлетворяет, то поверхность S_n может иметь не больше чем $n-1$ линейно независимых нетривиальных полей бесконечно малых изгибаний скольжения.

З а м е ч а н и е 3. Множество параллелей, отсекающих от поверхности S_n нежесткие относительно бесконечно малых изгибаний скольжения по плоскости части $S_n^{(\kappa)}$, может быть найдено из соотношения

$$u_n^{(k)} = \frac{1}{k^2 b_n}\left[\frac{\Delta_2^*}{\Delta_1} - \sum_{j=1}^{n}(b_{j-1}-b_j)\,u_{j-1} + b_n(k^2-1)\,u_{n-1}\right],$$

где $\Delta_2^* = \Delta_2\big|_{\alpha=\pi/2}$.

З а м е ч а н и е 4. Если зафиксировать граничную параллель, то для поверхности S_n существует счетное множество конусов K_{α_k} таких, что поверхность S_n будет нежесткой по отношению к бесконечно малым изгибаниям, при которых край $u=u_n$ скользит по K_{α_k}. Углы α_k, которые образуют образующие конусов K_{α_k} с осью вращения поверхности, определяются из уравнения

$$\operatorname{ctg}\alpha_k = \frac{1}{k^2\left[(u_n-u_{n-1}) - \frac{\Delta_2'}{\Delta_1}\right.}\left\{\frac{\Delta_2'}{\Delta_1}b_n(k^2-1) - \sum_{j=1}^{n}(b_{j-1}-b_j)\,u_{j-1} - \right.$$

$$\left. - k^2 b_n(u_n-u_{n-1}) - b_n u_{n-1}\right\},$$

где $\Delta_2' = \frac{1}{b_n(k^2-1)+k^2\operatorname{ctg}_\alpha}\Delta_2$.

2. Пусть S_n — двусвязная ребристая поверхность, меридиан которой есть ломаная, состоящая из прямолинейных отрезков и не имеющая общих точек с осью вращения. Рассмотрим бесконечно малые изгибания скольжения поверхности S_n, в процессе которых обе граничные параллели поверхности скользят по наперед заданным конусам K_α и K_β, образующие которых образуют с осью вращения углы α и β соответственно.

Уравнение меридиана такой поверхности можно представить в виде

$$r(u) = \begin{cases} b_1 u + d, & 0 \leqslant u \leqslant u_1, \\ b_2 u + (b_1-b_2)\,u_1 + d, & u_1 \leqslant u \leqslant u_2, \\ b_3 u + (b_1-b_2)\,u_1 + (b_2-b_3)\,u_2 + d, & u_2 \leqslant u \leqslant u_3, \\ b_n u + (b_1-b_2)u_1 + (b_2-b_3)\,u_2 + \ldots + (b_{n-1}-b_n)\,u_{n-1} + d, & \\ & u_{n-1} \leqslant u \leqslant u_n, \end{cases} \tag{13}$$

где $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1} b_n$ — угловые коэффициенты соответствующих звеньев ломаной.

Т е о р е м а 3. *Для того чтобы двусвязная ребристая поверхность S_n была нежесткой по отношению к бесконечно малым изгибаниям, при которых обе ее граничные параллели скользят по наперед заданным конусам K_α и K_β соответственно, необходимо и достаточно, чтобы характеризующие ее параметры при целых $k \geqslant 2$ удовлетворяли условию*

$$u_n^{(k)} = \frac{1}{k^2(b_n+\operatorname{ctg}\beta)}\left\{\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \sum_{j=1}^{n}(b_{j-1}-b_j)u_{j-1} + u_{n-1}[(k^2-1)b_n + k^2\operatorname{ctg}\beta] - d\right\},$$

где

$$
\sigma_1 = \begin{vmatrix}
\frac{b_1(k^2-1)+k^2\operatorname{ctg}\alpha}{d} & 1 & \dots & 0 \\
\frac{(b_2-b_1)(k^2-1)}{b_1u_1+d} & \frac{u_1(b_2-b_1)(k^2-1)}{b_1u_1+d}-1 & \dots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\frac{(b_n-b_{n-1})(k^2-1)}{b_{n-1}u_{n-1}+\sum\limits_{j=1}^{n-1}(b_{j-1}-b_j)u_{j-1}+d} & \frac{u_1(b_n-b_{n-1})(k^2-1)}{b_{n-1}u_{n-1}+\sum\limits_{j=1}^{n-1}(b_{j-1}-b_j)u_{j-1}+d} & \dots & \frac{(u_{n-1}-u_{n-2})(b_n-b_{n-1})(k^2-1)}{b_{n-1}u_{n-1}+\sum\limits_{j=1}^{n-1}(b_{j-1}-b_j)u_{j-1}+d}-1
\end{vmatrix}, \tag{14}
$$

$$
\sigma_2 = \begin{vmatrix}
\frac{b_1(k^2-1)+k^2\operatorname{ctg}\alpha}{d} & 1 & \dots & 0 \\
\frac{(b_2-b_1)(k^2-1)}{b_1u_1+d} & \frac{u_1(b_2-b_1)(k^2-1)}{b_1u_1+d}-1 & \dots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_n(k^2-1)+k^2\operatorname{ctg}\beta & u_1[b_n(k^2-1)+k^2\operatorname{ctg}\beta] & \dots & (u_{n-1}-u_{n-2})[b_n(k^2-1)+k^2\operatorname{ctg}\beta]
\end{vmatrix}.
$$

Доказательство. Как отмечалось при доказательстве теоремы 1, для непрерывности изгибающего поля $\vec{z}(u, v)$ на всей поверхности S_n необходимо, чтобы в точках излома меридиана выполнялись условия (5) и (6).

Из уравнения (3), принимая во внимание (13) и (5), получим, что $\gamma_{ki}(u)$ должно иметь вид

$$
\gamma_{ki}(u) = \begin{cases}
A_{i1}u + B_i, & 0 \leqslant u \leqslant u_1, \\
A_{i1}u + (A_{i1} - A_{i2})u_1 + B_i, & u_1 \leqslant u \leqslant u_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \\
A_{in}u + (A_{i1} - A_{i2})u_1 + \ldots + (A_{in-1} - A_{in})u_{n-1} + B_i, & u_{n-1} \leqslant u \leqslant u_n,
\end{cases} \tag{15}
$$

где A_{i1} $A_{i2}, \ldots, A_{in}$, B_i — произвольные постоянные.

Для того чтобы $\gamma_{ki}(u)$ удовлетворяло и условию (6), постоянные A_{ij}, B_i должны быть связаны соотношениями

$$
\frac{(b_2-b_1)(k^2-1)}{b_1u_1+d}B_i + \left[\frac{u_1(b_2-b_1)(k^2-1)}{b_1u_1+d} - 1\right]A_{i1} + A_{i2} = 0,
$$

$$
\frac{(b_3-b_2)(k^2-1)}{b_2u_2+(b_1-b_2)u_1+d}B_i + \frac{u_1(b_3-b_2)(k^2-1)}{b_2u_2+(b_1-b_2)u_1+d}A_{i1} +
$$

$$
+\left[\frac{(u_2-u_1)(b_3-b_2)(k^2-1)}{b_2u_2+(b_1-b_2)u_1+d} - 1\right]A_{i2} + A_{i3} = 0,
$$

. . . .

$$\frac{(b_n - b_{n-1})(k^2-1)}{b_{n-1}u_{n-1} + \sum\limits_{j=1}^{n-1}(b_{j-1}-b_j)u_{j-1} + d} B_i + \frac{u_1(b_n - b_{n-1})(k^2-1)}{b_{n-1}u_{n-1} + \sum\limits_{j=1}^{n-1}(b_{j-1}-b_j)u_{j-1} + d} A_{i1} +$$

$$+ \ldots + \left[\frac{(u_{n-1}-u_{n-2})(b_n - b_{n-1})(k^2-1)}{b_{n-1}u_{n-1} + \sum\limits_{j=1}^{n-1}(b_{j-1}-b_j)u_{j-1} + d} - 1\right] A_{in-1} + A_{in} = 0.$$

Для того чтобы граничные параллели $u = 0$ и $u = u_n$ скользили по конусам K_α и K_β соответственно, необходимо, чтобы $\gamma_{ki}(u)$ при $u = 0$ и $u = u_n$ удовлетворяло условиям

$$r(0)\gamma'_{ki}(0) + r'(0)(k^2-1)\gamma_{ki}(0) + k^2\gamma_{ki}(0)\operatorname{ctg}\alpha = 0,$$

$$r(u_n)\gamma'_{ki}(u_n) + r'(u_n)(k^2-1)\gamma_{ki}(u_n) + k^2\gamma_{ki}(u_n)\operatorname{ctg}\beta = 0, \tag{16}$$

или с учетом (13) и (15)

$$\frac{b_1(k^2-1) + k^2\operatorname{ctg}\alpha}{d} B_i + A_{i1} = 0,$$

$$\frac{b_n(k^2-1) + k^2\operatorname{ctg}\beta}{b_n u_n + \sum\limits_{j=1}^{n}(b_{j-1}-b_j)u_{j-1} + d} B_i + \frac{u_1[b_n(k^2-1) + k^2\operatorname{ctg}\beta]}{b_n u_n + \sum\limits_{j=1}^{n}(b_{j-1}-b_j)u_{j-1} + d} A_{i1} +$$

$$+ \ldots + \left[1 + (u_n - u_{n-1})\frac{b_n(k^2-1) + k^2\operatorname{ctg}\beta}{b_n u_n + \sum\limits_{j=1}^{n}(b_{j-1}-b_j)u_{j-1} + d}\right] A_{in} = 0. \tag{17}$$

Как отмечалось выше, поверхность S_n будет нежесткой тогда и только тогда, когда соответствующее ей дифференциальное уравнение (3) при краевых условиях (16) имеет нетривиальное решение. Для этого необходимо и достаточно, чтобы характеризующие S_n параметры удовлетворяли условию

$$\begin{vmatrix} \dfrac{b_1(k^2-1) + k^2\operatorname{ctg}\alpha}{d} & 1 & \ldots & 0 \\ \dfrac{(b_2-b_1)(k^2-1)}{b_1u_1 + d} & \dfrac{u_1(b_2-b_1)(k^2-1)}{b_1u_1+d} - 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{(b_n - b_{n-1})(k^2-1)}{b_{n-1}u_{n-1} + \sum\limits_{j=1}^{n-1}(b_{j-1}-b_j)u_{j-1} + d} & \dfrac{u_1(b_n - b_{n-1})(k^2-1)}{b_{n-1}u_{n-1} + \sum\limits_{j=1}^{n-1}(b_{j-1}-b_j)u_{j-1} + d} & \ldots & 1 \\ \dfrac{b_n(k^2-1) + k^2\operatorname{ctg}\beta}{b_n u_n + \sum\limits_{j=1}^{n}(b_{j-1}-b_j)u_{j-1} + d} & \dfrac{u_1[b_n(k^2-1) + k^2\operatorname{ctg}\beta]}{b_n u_n + \sum\limits_{j=1}^{n}(b_{j-1}-b_j)u_{j-1} + d} & \ldots & 1 + \dfrac{(u_n - u_{n-1})[b_n(k^2-1) + k^2\operatorname{ctg}\beta]}{b_n u_n + \sum\limits_{j=1}^{n}(b_{j-1}-b_j)u_{j-1} + d} \end{vmatrix} \tag{18}$$

Так как равенства (14) и (18) эквивалентны, то этим сформулированную теорему доказано.

Как следствие из этой теоремы имеем:

Т е о р е м а 4. *Если поверхность S_n нежестка по отношению к бесконечно малым изгибаниям, при которых граничные параллели скользят по наперед заданным конусам K_α и K_β, то на ней существует счетное множество параллелей $u_n^{(\kappa)}$, отсекающих от S_n пояса $S_n^{(\kappa)}$, нежесткие по отношению к бесконечно малым изгибаниям, при которых параллели $u = 0$ и $u = u_n^{(k)}$ скользят по тем же конусам K_α и K_β.*

Следует отметить, что соотношение (14) указывает нам счетное, но, в отличие от гладких поверхностей вращения отрицательной кривизны, не всюду плотное множество параллелей $u_n^{(\kappa)}$, отсекающих от поверхности S_n нежесткие пояса $S_n^{(\kappa)}$.

З а м е ч а н и е 1. Поскольку (12) является уравнением $(n+1)$-го порядка относительно k^2 и $k = 0$ удовлетворяет его, то поверхность S_n может иметь не больше чем n линейно независимых нетривиальных полей бесконечно малых изгибаний.

П р и м е р. Поверхность S_2, меридиан которой имеет вид

$$r(u) = \begin{cases} u, & \frac{1}{4} \leqslant u \leqslant 1, \\ \frac{3}{2}u - \frac{1}{2}, & 1 \leqslant u \leqslant \frac{4}{3}, \end{cases}$$

допускает два нетривиальные ($k_1 = 2$, $k_2 = 3$) линейно независимые поля бесконечно малых изгибаний, в процессе которых край $u = \frac{1}{4}$ скользит по конусу с углом $2\alpha = 2\,\mathrm{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)$ при вершине, а край $u = \frac{4}{3}$ скользит по своей плоскости.

З а м е ч а н и е 2. Множество параллелей, отсекающих от S_n нежесткие по отношению к бесконечно малым изгибаниям скольжения по плоскостям граничных параллелей пояса $S_n^{(\kappa)}$, может быть найдено из соотношения

$$u_n^{(k)} = \frac{1}{k^2 b_n}\left\{\frac{\sigma_2^*}{\sigma_1^*} - \sum_{j=1}^{n}(b_{j-1} - b_j)\,u_{j-1} + b_n u_{n-1}(k^2 - 1) - d\right\},$$

где $\sigma_2^* = \sigma_2\big|_{\substack{\alpha=\pi/2\\ \beta=\pi/2}}$; $\sigma_1^* = \sigma_1\big|_{\alpha=\pi/2}$.

З а м е ч а н и е 3. Если граничные параллели поверхности S_n заданы, то для любого α существует последовательность $\{\beta_k\}$ такая, что поверхность S_n будет нежесткой по отношению к бесконечно малым изгибаниям, при которых границы $u = 0$ и $u = u_n$ скользят по конусам K_α и K_{β_k} соответственно. Углы β_k определяются из уравнения

$$\mathrm{ctg}\,\beta_k = \frac{1}{k^2\left(u_n - u_{n-1} - \frac{\sigma_2'}{\sigma_1}\right)}\left\{b_n(k^2 - 1)\,\frac{\sigma_2'}{\sigma_1} - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{n}(b_{j-1} - b_j)\,u_{j-1} + b_n\left[(k^2 - 1)\,u_{n-1} - k^2 u_n\right] - d\right\},$$

где $\sigma_2' = \frac{1}{b_n(k^2 - 1) + k^2\,\mathrm{ctg}\,\beta_k}\sigma_2$. При $k \to \infty$ $\mathrm{ctg}\,\beta_k \to -b_n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Э. Кон-Фоссен, Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом, Физматгиз, М., 1959.
2. Б. А. Бублик, Нежесткие ребристые поверхности, Тезисы докладов второй научно-методической конференции математических кафедр пединститутов юга РСФСР.
3. И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, М., 1959.
4. В. И. Михайловский, Бесконечно малые изгибания «скольжения» поверхностей вращения отрицательной кривизны, УМЖ, т. XIV, № 1, 1962, 18—29.

Поступила 31.IV 1962 г.
Киев