О некоторых классах p-листных функций

Т. Г. Эзрохи

В настоящей заметке рассматриваются классы регулярных в круге $|z| < 1$ функций, введенные И. М. Гальпериным [1], которые являются обобщением класса L [3]. И. М. Гальперин доказал, что для этих классов функций справедливы теоремы, аналогичные тем, которые доказаны Шильдом для класса S_p [2], а Левандовским для класса L. Кроме того, нами рассмотрен класс Q_p регулярных в круге $|z| < 1$ функций, который является обобщением класса Q'_p [1]. Рассмотрены также аналогичные классы регулярных в области $1 < |z| < \infty$ функций. Для всех этих классов установлены теоремы вращения, а также даны оценки величин $\arg \frac{f}{z^p}$; для класса L_p дана оценка величины $\operatorname{Re} \frac{zf''}{f'}$. Все полученные оценки точные.

1. Обозначим через L_p класс регулярных в круге $|z| < 1$ функций

$$f(z) = z^p + \sum_{n=2}^{\infty} a_{p+n-1} z^{p+n-1} \quad (p \text{ — целое, } \geqslant 1),$$

удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{p+n-1}{p} |a_{p+n-1}| \leqslant 1.$$

Условимся в дальнейшем обозначать $r = |z|$.

Функции $f \in L_p$ p-листны и звездны в круге $|z| < 1$ [1].

Теорема 1. *Если $f \in L_p$, то в круге $|z| < 1$ имеют место оценки*

$$-\operatorname{arctg} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \leqslant \arg \frac{f'(z)}{z^{p-1}} \leqslant \operatorname{arctg} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\text{*}.$$

Оценки точные и достигаются функциями

$$f(z) = z^p + \frac{p}{p+1} e^{i\alpha} z^{p+1} \quad (\alpha \text{ — } \textit{вещественное}) \tag{1}$$

и только ими.

Эта теорема вытекает из теоремы 13 при $\gamma = 0$ (см. § 5).

---

* При $p=1$ получаем теорему вращения для класса функций L [4].

Теорема 2. *Если $f(z) \in L_p$, то в круге $|z| < 1$ имеют место о*

$$-\operatorname{arctg} \frac{pr}{\sqrt{(p+1)^2 - p^2r^2}} \leqslant \arg \frac{f(z)}{z^p} \leqslant \operatorname{arctg} \frac{pr}{\sqrt{(p+1)^2 - p^2r^2}}.$$

Оценки достигаются функциями (1) *и только ими.*

Доказательство. Имеем

$$\arg \frac{f(z)}{z^p} = \operatorname{arctg} \frac{\sum_{n=2}^{\infty} |a_{p+n-1}| r^{n-1} \sin \varphi_{n-1}}{1 + \sum_{n=2}^{\infty} |a_{p+n-1}| r^{n-1} \cos \varphi_{n-1}}.$$

Введем обозначение

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_{p+n-1}| = \varepsilon.$$

Тогда

$$\arg \frac{f(z)}{z^p} = \operatorname{arctg} \frac{\sum_{n=2}^{\infty} |a_{p+n-1}| \varepsilon r^{n-1} \sin \varphi_{n-1}}{\sum_{n=2}^{\infty} |a_{p+n-1}| (1 + \varepsilon r^{n-1} \cos \varphi_{n-1})}.$$

В силу леммы [4]

$$\operatorname{arctg} \inf \frac{\varepsilon r^{n-1} \sin \varphi_{n-1}}{1 + \varepsilon r^{n-1} \cos \varphi_{n-1}} \leqslant \arg \frac{f(z)}{z^p} \leqslant \operatorname{arctg} \sup \frac{\varepsilon r^{n-1} \sin \varphi_{n-1}}{1 + \varepsilon r^{n-1} \cos \varphi_{n-}}$$

или

$$-\operatorname{arctg} \frac{\varepsilon r}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 r^2}} \leqslant \arg \frac{f(z)}{z^p} < \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon r}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 r^2}}.$$

Так как $\varepsilon = \sum_{n=2}^{\infty} |a_{p+n-1}| \leqslant \frac{p}{p+1}$ [1], то

$$-\operatorname{arctg} \frac{pr}{\sqrt{(p+1)^2 - p^2r^2}} \leqslant \arg \frac{f(z)}{z^p} < \operatorname{arctg} \frac{pr}{\sqrt{(p+1)^2 - p^2r^2}}.$$

Для функций (1)

$$\arg \frac{f(z)}{z^p} = \operatorname{arctg} \frac{\frac{p}{p+1} r \sin \varphi}{1 + \frac{p}{p+1} r \cos \varphi};$$

если $\cos \varphi = -\frac{pr}{p+1}$, то

$$\arg \frac{f(z)}{z^p} = \pm \operatorname{arctg} \frac{pr}{\sqrt{(p+1)^2 - p^2r^2}},$$

т. е. указанные оценки точные.

Теорема 3. *Если $f(z) \in L_p$, то в круге $|z| < 1$ имеет место оценка*

$$\operatorname{Re}\frac{zf''(z)}{f'(z)} \geqslant \frac{p-1-pr}{1-r}.$$

Оценка достигается функциями (1) *и только ими.*

Доказательство. Имеем

$$\operatorname{Re}\frac{zf''}{f'} = \operatorname{Re}\left[p-1+\frac{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{p+n-1}{p}(n-1)a_{p+n-1}z^{n-1}}{1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{p+n-1}{p}a_{p+n-1}z^{n-1}}\right] \geqslant$$

$$\geqslant p-1-\frac{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{p+n-1}{p}(n-1)|a_{p+n-1}|r^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{p+n-1}{p}|a_{p+n-1}|r^{n-1}} =$$

$$= \frac{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{p+n-1}{p}|a_{p+n-1}|(p-1-(p+n-2)\varepsilon r^{n-1})}{\sum_{n=2}^{\infty}\frac{p+n-1}{p}|a_{p+n-1}|(1-\varepsilon r^{n-1})},$$

где $\varepsilon = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{p+n-1}{p}|a_{p+n-1}| \leqslant 1$. Тогда

$$\operatorname{Re}\frac{zf''}{f'} \geqslant \inf\frac{p-1-\varepsilon(p+n-2)r^{n-1}}{1-\varepsilon r^{n-1}} \geqslant \inf\frac{p-1-(p+n-2)r^{n-1}}{1-r^{n-1}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{p-1-pr}{1-r}.$$

Легко проверить, что оценка точная, достигается функциями (1) и только ими.

Из этой теоремы следует, что

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \geqslant \frac{p-1-pr}{1-r},$$

причем неравенство имеет смысл для $r \leqslant \frac{p-1}{p}$. Указанное неравенство также достигается функциями (1) и только ими.

2. Обозначим через L_p^* класс регулярных в области $1 < |z| < \infty$ функций

$$f(z) = z^p + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{p+n-1}}{z^{p+n-1}},$$

удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p+n-1}{p} |a_{p+n-1}| \leqslant 1.$$

Теорема 4. *Каждая функция* $f(z) \in L_p^*$ *отображает* $1 < |z| < \infty$ *на область, дополнение которой звездно относительно точки* $z = 0$.

Доказательство. Имеем

$$\operatorname{Re} \frac{zf'(z)}{f(z)} = \operatorname{Re} \frac{p - \sum_{n=1}^{\infty} (p+n-1) a_{p+n-1} z^{-2p-n+1}}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{p+n-1} z^{-2p-n+1}} =$$

$$= \operatorname{Re} \frac{\left(p - \sum_{n=1}^{\infty} (p+n-1) a_{p+n-1} z^{-2p-n+1}\right) \left(1 + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} a_{p+n-1} z^{-2p-n+1}}\right)}{\left|1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{p+n-1} z^{-2p-n+1}\right|^2}.$$

Очевидно, что

$$\operatorname{Re}\left[\left(p - \sum_{n=1}^{\infty} (p+n-1) a_{p+n-1} z^{-2p-n+1}\right) \left(1 + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} a_{p+n-1} z^{-2p-n+1}}\right)\right] \geqslant$$

$$\geqslant p - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) |a_{p+n-1}| r^{-2p-n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} (p+n-1) |a_{p+n-1}| r^{-2p-n+1} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} |a_{p+n-1}| r^{-2p-n+1} = \left(p - \sum_{n=1}^{\infty} (p+n-1) |a_{p+n-1}| r^{-2p-n+1}\right) \times$$

$$\times \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} |a_{p+n-1}| r^{-2p-n+1}\right) > 0 \quad (r > 1),$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. *Если* $f(z) \in L_p^*$, *то в области* $1 < |z| < \infty$ *имеют место оценки*

$$|z|^p - \frac{1}{|z|^p} \leqslant |f(z)| \leqslant |z|^p + \frac{1}{|z|^p},$$

$$p|z|^{p-1} - \frac{p}{|z|^{p+1}} \leqslant |f'(z)| \leqslant p|z|^{p-1} + \frac{p}{|z|^{p+1}}.$$

Оценки достигаются функциями

$$f(z) = z^p + \frac{e^{i\alpha}}{z^p} \quad (\alpha \text{ — } \textit{вещественное}) \tag{2}$$

и только ими.

Для доказательства следует воспользоваться неравенством $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{p+n-1}| \leqslant 1$.

Теорема 6. *Если $f(z) \in L_p^*$, то в области $1 < |z| < \infty$ имеют место оценки*

$$(p-1)\arg z - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{r^{4p}-1}} \leqslant \arg f'(z) \leqslant (p-1)\arg z + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{r^{4p}-1}}.$$

Оценки точные, достигаются функциями (2) *и только ими**.

Доказательство. Так как

$$f'(z) = pz^{p-1}\left[1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p+n-1}{p}\frac{|a_{p+n-1}|}{r^{2p+n-1}}\cos\varphi_{n-1} + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p+n-1}{p}\frac{|a_{p+n-1}|}{r^{2p+n-1}}\sin\varphi_{n-1}\right],$$

то

$$\arg f'(z) = (p-1)\arg z + \operatorname{arctg}\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p+n-1}{p}\frac{|a_{p+n-1}|}{r^{2p+n-1}}\sin\varphi_{n-1}}{1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p+n-1}{p}\frac{|a_{p+n-1}|}{r^{2p+n-1}}\cos\varphi_{n-1}}.$$

Введем обозначения

$$\eta = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p+n-1}{p}\frac{|a_{p+n-1}|}{r^{2p+n-1}}\sin\varphi_{n-1}}{1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p+n-1}{p}\frac{|a_{p+n-1}|}{r^{2p+n-1}}\cos\varphi_{n-1}},$$

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{p+n-1}{p}|a_{p+n-1}|.$$

Тогда

$$\eta = \frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p+n-1}{p}|a_{p+n-1}|\frac{\varepsilon\sin\varphi_{n-1}}{r^{2p+n-1}}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p+n-1}{p}|a_{p+n-1}|\left(1-\frac{\varepsilon}{r^{2p+n-1}}\cos\varphi_{n-1}\right)}$$

и, в силу леммы [4],

$$\inf\frac{\frac{\varepsilon\sin\varphi_{n-1}}{r^{2p+n-1}}}{1-\frac{\varepsilon\cos\varphi_{n-1}}{r^{2p+n-1}}} \leqslant \eta \leqslant \sup\frac{\frac{\varepsilon\sin\varphi_{n-1}}{r^{2p+n-1}}}{1-\frac{\varepsilon\cos\varphi_{n-1}}{r^{2p+n-1}}}.$$

* При $p=1$ получаем теорему вращения для класса функций L^* [5].

Легко убедиться, что для $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$

$$-\frac{1}{\sqrt{r^{4p}-1}} \leqslant \frac{\varepsilon \sin \varphi}{r^{2p+n-1} - \varepsilon \cos \varphi} \leqslant \frac{1}{\sqrt{r^{4p}-1}}.$$

Для функций (2)

$$\arg f'(z) = (p-1)\arg z + \operatorname{arctg} \frac{\frac{\sin \varphi}{r^{2p}}}{1 - \frac{\cos \varphi}{r^{2p}}};$$

если $\cos \varphi = -\frac{1}{r^{2p}}$, то

$$\arg f'(z) = (p-1)\arg z \pm \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{r^{4p}-1}},$$

т. е. указанные оценки точные.

Теорема 7. *Если $f(z) \in L_p^*$, то в области $1 < |z| < \infty$ имеют место оценки*

$$-\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{r^{4p}-1}} \leqslant \arg \frac{f(z)}{z^p} \leqslant \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{r^{4p}-1}}.$$

Оценки достигаются функциями (2) *и только ими.*

Доказательство проводится точно так же, как и в теореме 6.

3. Обозначим через R_p^0 класс регулярных в круге $|z| < 1$ функций

$$\varphi(z) = z^p + \sum_{n=2}^{\infty} b_{p+n-1} z^{p+n-1},$$

удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{p+n-1}{p}\right)^2 |b_{p+n-1}| \leqslant 1.$$

Легко убедиться, что если $\varphi(z) \in R_p^0$, то

$$f(z) = \frac{z\varphi'(z)}{p} \in L_p \tag{3}$$

и, наоборот, если $f(z) \in L_p$, то

$$\varphi(z) = p \int_0^z \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta \in R_p^0.$$

Из этого замечания следует, что

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + \frac{z\varphi''(z)}{\varphi'(z)}.$$

Поэтому функции класса R_p^0 выпуклы в $|z| < 1$.

Из теоремы 2, если учесть соотношение (3), вытекает следующая теорема.

Теорема 8. *Если* $\varphi(z) \in R_p^0$, *то в круге* $|z| < 1$ *имеют место оценки*

$$-\operatorname{arctg} \frac{pr}{\sqrt{(p+1)^2 - p^2 r^2}} \leqslant \arg \frac{\varphi'(z)}{z^{p-1}} \leqslant \operatorname{arctg} \frac{pr}{\sqrt{(p+1)^2 - p^2 r^2}}.$$

Оценки точные, достигаются функциями

$$\varphi(z) = z^p + \frac{p^2}{(p+1)^2} e^{i\alpha} z^{p+1} \qquad (\alpha \text{ — вещественное}) \tag{4}$$

и только ими.

Теорема 9. *Если* $\varphi(z) \in R_p^0$, *то в круге* $|z| < 1$ *имеют место оценки*

$$-\operatorname{arctg} \frac{p^2 r}{\sqrt{(p+1)^4 - p^4 r^2}} \leqslant \arg \frac{\varphi(z)}{z^p} \leqslant \operatorname{arctg} \frac{p^2 r}{\sqrt{(p+1)^4 - p^4 r^2}}.$$

Оценки точные, достигаются функциями (4) *и только ими.*

Доказывается теорема точно так же, как и теорема 2.

4. Обозначим через R_p^* класс регулярных в области $1 < |z| < \infty$ функций

$$\varphi(z) = z^p + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{p+n-1}}{z^{p+n-1}},$$

удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p+n-1}{p} \right)^2 |b_{p+n-1}| \leqslant 1.$$

Между классами функций L_p^* и R_p^* справедливы те же соотношения, что и между классами функций L_p и R_p. Отсюда следует, что функции класса R_p^* выпуклы в области $1 < |z| < \infty$.

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 10. *Если* $\varphi(z) \in R_p^*$, *то в области* $1 < |z| < \infty$ *имеют место оценки*

$$|z|^p - \frac{1}{|z|^p} \leqslant |\varphi(z)| \leqslant |z|^p + \frac{1}{|z|^p},$$

$$p|z|^{p-1} - \frac{p}{|z|^{p+1}} \leqslant |\varphi'(z)| \leqslant p|z|^{p-1} + \frac{p}{|z|^{p+1}}.$$

Оценки точные, достигаются функциями

$$\varphi(z) = z^p + \frac{e^{i\alpha}}{z^p} \qquad (\alpha \text{ — вещественное}) \tag{5}$$

и только ими.

Теорема 11. *Если* $\varphi(z) \in R_p^*$, *то в области* $1 < |z| < \infty$ *имеют место оценки*

$$-\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{r^{4p} - 1}} \leqslant \arg \frac{\varphi'(z)}{z^{p-1}} \leqslant \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{r^{4p} - 1}}.$$

Оценки точные, достигаются функциями (5) *и только ими.*

Теорема 10 следует из теоремы 5, а теорема 11 — из теоремы 7.

5. Обозначим через Q_p класс регулярных в круге $|z| < 1$ функций

$$F(z) = z^p + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p+n-1+\gamma}{p+\gamma} b_{p+n-1} z^{p+n-1},$$

удовлетворяющих условиям

$$\operatorname{Re}\gamma \geqslant 0, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{p+n-1}{p}\right)^2 |b_{p+n-1}| \leqslant 1.$$

Очевидно, что

$$F(z) = \frac{\gamma\varphi(z) + z\varphi'(z)}{p+\gamma},$$

где $\varphi(z) \in R_p^0$, или

$$F(z) = \alpha\varphi(z) + \beta z\varphi'(z),$$

если $\alpha + \beta p = 1$ и $\operatorname{Re}\frac{\alpha}{\beta} \geqslant 0 \left(\alpha = \frac{\gamma}{p+\gamma},\ \beta = \frac{1}{p+\gamma}\right)$. Если $\gamma = 0$, то $F(z) \in L_p$; если $\gamma = p$, то $F(z) \in Q_p'$ [1].

Теорема 12. *Функции $F(z) \in Q_p$ p-листны и звездны в круге $|z|<1$.*

Доказательство. Достаточно показать, что $Q_p \subset L_p$. Но это следует из неравенства

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{p+n-1}{p} \left| \frac{p+n-1+\gamma}{p+\gamma} b_{p+n-1} \right| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{p+n-1}{p}\right)^2 |b_{p+n-1}| \leqslant 1,$$

так как

$$\left| \frac{p+n-1+\gamma}{p+\gamma} \right| \leqslant \frac{p+n-1}{p}{}^*$$

Теорема 13. *Если $F(z) \in Q_p$, то в круге $|z| < 1$ имеют место оценки*

$$-\operatorname{arctg} \frac{|p+1+\gamma|\, pr}{\sqrt{(p+1)^2|p+\gamma|^2 - |p+1+\gamma|^2 p^2 r^2}} \leqslant \arg \frac{F'(z)}{z^{p-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{arctg} \frac{|p+1+\gamma|\, pr}{\sqrt{(p+1)^2|p+\gamma|^2 - |p+1+\gamma|^2 p^2 r^2}}.$$

---

* Для доказательства неравенства следует рассмотреть функцию

$$\zeta = \frac{A+\gamma}{B+\gamma} \quad (A > 0,\ B > 0,\ A > B),$$

которая отображает полуплоскость $\operatorname{Re}\gamma \geqslant 0$ на окружность, симметричную относительно оси ξ $(\zeta = \xi + i\eta)$ и пересекающую ось $O\xi$ в точках $\xi = 1$, $\xi = \frac{A}{B}$. Отсюда следует, что

$$\left| \frac{A+\gamma}{B+\gamma} \right| < \frac{A}{B}.$$

Оценки точные, достигаются функциями

$$F(z) = z^p + \frac{p+1+\gamma}{p+\gamma} \frac{p^2}{(p+1)^2} e^{i\alpha} z^{p+1} \qquad (\alpha\text{ — вещественное}) \tag{6}$$

и только ими.

Доказательство. Имеем

$$\arg\frac{F'(z)}{z^{p-1}} = \operatorname{arctg}\frac{\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{p+n-1+\gamma}{p+\gamma}\right|\frac{p+n-1}{p}|b_{p+n-1}|r^{n-1}\sin\varphi_{n-1}}{1+\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{p+n-1+\gamma}{p+\gamma}\right|\frac{p+n-1}{p}|b_{p+n-1}|r^{n-1}\cos\varphi_{n-1}} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{p+n-1+\gamma}{p+\gamma}\right|\frac{p+n-1}{p}|b_{p+n-1}|\varepsilon r^{n-1}\sin\varphi_{n-1}}{\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{p+n-1+\gamma}{p+\gamma}\right|\frac{p+n-1}{p}|b_{p+n-1}|(1+\varepsilon r^{n-1}\cos\varphi_{n-1})},$$

где

$$\varepsilon = \sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{p+n-1+\gamma}{p+\gamma}\right|\frac{p+n-1}{p}|b_{p+n-1}|.$$

В силу леммы]4]

$$\operatorname{arctg}\inf\frac{\varepsilon r^{n-1}\sin\varphi_{n-1}}{1+\varepsilon r^{n-1}\cos\varphi_{n-1}} \leqslant \arg\frac{F'(z)}{z^{p-1}} \leqslant \operatorname{arctg}\sup\frac{\varepsilon r^{n-1}\sin\varphi_{n-1}}{1+\varepsilon r^{n-1}\cos\varphi_{n-1}}.$$

Отметим, что для $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$

$$-\frac{\varepsilon r}{\sqrt{1-\varepsilon^2 r^2}} \leqslant \frac{\varepsilon r^{n-1}\sin\varphi_{n-1}}{1+\varepsilon r^{n-1}\cos\varphi_{n-1}} \leqslant \frac{\varepsilon r}{\sqrt{1-\varepsilon^2 r^2}}.$$

Исследуя функцию $\varepsilon = \sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{p+n-1+\gamma}{p+\gamma}\right|\frac{p+n-1}{p}x_n$ $(x_n \geqslant 0)$ при условии $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{p+n-1}{p}\right)^2 x_n = \delta$, $\delta\leqslant 1$, а также пользуясь неравенством

$$\frac{|p+n-1+\gamma|}{p+n-1} \leqslant \frac{|p+1+\gamma|}{p+1},$$

получаем, что

$$\varepsilon \leqslant \left|\frac{p+1+\gamma}{p+\gamma}\right|\cdot\frac{p}{p+1}.$$

Тогда

$$-\frac{|p+1+\gamma|pr}{\sqrt{(p+1)^2|p+\gamma|^2-|p+1+\gamma|^2p^2r^2}}\leqslant\frac{\varepsilon r^{n-1}\sin\varphi}{1+\varepsilon r^{n-1}\cos\varphi}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|p+1+\gamma|pr}{\sqrt{(p+1)^2|p+\gamma|^2-|p+1+\gamma|^2p^2r^2}}.$$

Таким образом

$$-\operatorname{arctg}\frac{|p+1+\gamma|pr}{\sqrt{(p+1)^2|p+\gamma|^2-|p+1+\gamma|^2p^2r^2}}\leqslant\arg\frac{F'(z)}{z^{p-1}}\leqslant$$

$$\leqslant\operatorname{arctg}\frac{|p+1+\gamma|pr}{\sqrt{(p+1)^2|p+\gamma|^2-|p+1+\gamma|^2p^2r^2}}.$$

Для функций (6)

$$\arg\frac{F'(z)}{z^{p-1}}=\operatorname{arctg}\frac{\left|\dfrac{p+1+\gamma}{p+\gamma}\right|\dfrac{p}{p+1}r\sin\varphi}{1+\left|\dfrac{p+1+\gamma}{p+\gamma}\right|\dfrac{p}{p+1}r\cos\varphi};$$

если $\cos\varphi=-\left|\dfrac{p+1+\gamma}{p+\gamma}\right|\dfrac{pr}{p+1}$, то

$$\arg\frac{F'(z)}{z^{p-1}}=\pm\operatorname{arctg}\frac{\left|\dfrac{p+1+\gamma}{p+\gamma}\right|\dfrac{pr}{p+1}}{\sqrt{1-\left|\dfrac{p+1+\gamma}{p+\gamma}\right|^2\dfrac{p^2r^2}{(p+1)^2}}},$$

т. е. указанные оценки точные.

6. Обозначим через Q_p^* класс регулярных в области $1<|z|<\infty$ функций

$$F(z)=z^p-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p+n-1-\gamma}{p+\gamma}\frac{b_{p+n-1}}{z^{p+n-1}},$$

удовлетворяющих условиям

$$\operatorname{Re}\gamma\geqslant 0,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{p+n-1}{p}\right)^2|b_{p+n-1}|\leqslant 1.$$

Очевидно, что

$$F(z)=\frac{\gamma\varphi(z)+z\varphi'(z)}{p+\gamma},$$

где $\varphi(z)\in R_p^*$. При $\gamma=0$ получаем класс функций L_p^*.

Теорема 14. *Каждая функция $F(z)\in Q_p^*$ отображает $1<|z|<\infty$ на область, дополнение которой звездно относительно точки $z=0$.*

Теорема следует из того, что, как легко убедиться, $Q_p^*\subset L_p^*$.

Теорема 15. *Если* $F(z) \in Q_p^{\bullet}$, *то в области* $1 < |z| < \infty$ *имеют место оценки*

$$-\operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\sqrt{r^{4p}-\varepsilon^2}} \leqslant \arg\frac{F'(z)}{z^{p-1}} \leqslant \operatorname{arctg}\frac{\varepsilon}{\sqrt{r^{4p}-\varepsilon^2}},$$

где

$$\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{p+n-1-\gamma}{p+\gamma}\right|\frac{p+n-1}{p}\,|b_{p+n-1}| \leqslant 1.$$

Оценки достигаются функциями

$$F(z) = z^p - \frac{p-\gamma}{p+\gamma}\cdot\frac{e^{i\alpha}}{z^p} \qquad (\alpha \text{ — вещественное}). \tag{7}$$

Для $\varepsilon = 1$ *оценки достигаются функциями* (7), *если только* $\operatorname{Re}\gamma = 0$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 13.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. М. Гальперин, До теорії p-листих функцій, Доп. АН УРСР, 1962, 12.

2. A. Schild, On a class of functions schlicht in the unite circle, Proc. of Amer. Math. Soc., v. 5, N. I, 1954, 115—121.

3. Z. Lewandowski, Quelques remarques sur les theorems de Schild relatifs á une classe de fonctions univalents, Ann. Univ. M. Curie-Sklodowska, Sectio A., vol., 9, 1955.

4. Т. Г. Эзрохи, Об одном классе однолистных функций, Сб. «Вопросы матем физики и теории функций», Изд-во «Наукова думка», К., 1964.

5. Т. Г. Эзрохи, Об одном классе функций однолистных в области $1 < |z| < \infty$ Изв. высш. уч. завед. № 1, 1964, 38.

Поступила 16.XI 1961 г.

Киев