О нормальной разрешимости и индексе граничной задачи для эллиптической системы первого порядка на ориентируемой поверхности с краем

А. Б. Юданина

В работе рассмотрена граничная задача для эллиптической системы первого порядка на ориентируемой поверхности с краем. Предполагается, что граничный оператор связан с системой условием Я. Б. Лопатинского [7]. Получена формула (1.5) для индекса, и одновременно доказана нормальная разрешимость задачи. Следует отметить, что уже известна нетеровость более общих эллиптических задач (см., например, [1]).

Формула (1.5) дает возможность провести явное вычисление индекса. Практически это требует вычисления приращений аргументов функций, получаемых из коэффициентов задачи. Работа обобщает некоторые результаты А. И. Вольперта [2], [4], [5].

§ 1. Постановка задачи

Пусть S — ориентируемая гладкая поверхность с краем γ, расположенная в трехмерном эвклидовом пространстве. S гомеоморфна сфере с (ϱ) ручками и (n) отверстиями. На поверхности $\sigma \supset S$ выбрана система координат класса 3, эквивалентная [8] специальной (см. § 3). Рассматривается система уравнений на S, имеющая в локальных координатах вид

$$A^j(\xi)\frac{\partial u}{\partial \xi^j} + A^0(\xi)u = f(\xi) \quad (\xi = (\xi^1, \xi^2)), \quad (j = 1,\ 2), \tag{1.1}$$

где $A^j(\xi)\,(j = 0,\ 1,\ 2)$ — дважды непрерывно дифференцируемая на $\sigma \supset S$ вещественная $p \times p$ матрица. Элементы матрицы $A^j(\xi)$ $(j = 1,\ 2)$ изменяются как компоненты контравариантного вектора. Элементы матрицы $A^0(\xi)$ — абсолютные скаляры, u и f — столбцы из p элементов, причем столбец f удовлетворяет условию Гельдера на S.

Эллиптичность системы (1.1) означает, что $\det A^j(\xi)\alpha_j \neq 0$ для любых ненулевых векторов $(\alpha_1,\ \alpha_2)$ и всех точек $\xi \in S$.

Системе (1.1) ставится в соответствие система уравнений

$$\varepsilon i A^1(M) v(t) + A^2(M) \frac{dv}{dt} = 0, \tag{1.2}$$

где $\varepsilon = +1$ ($\varepsilon = -1$), если выбранная в окрестности точки $M \in S$ допустимая система координат положительно (отрицательно) ориентирована [4].

Когда $v(t)$ пробегает все решения системы (1.2), равные нулю на $+\infty$, то $v(0)$ образуют r-мерное ($r = \frac{p}{2}$ подпространство V_M комплексного p-мерного пространства.

Доказывается [4], что пространство V_M не зависит от произвола в выборе допустимой системы координат в окрестности точки M и что каждая точка $M \in S$ обладает окрестностью, где имеется непрерывно зависящий от M базис пространства V_M. Пусть $b(\xi)$ — матрица $r \times p$ с элементами, зависящими от точек $\xi \in \gamma$, и удовлетворяющая условию Гельдера вдоль контура γ. Предполагается выполнение условия Я. Б. Лопатинского [7].

$$\det b(\xi)\, \omega(\xi) \neq 0 \quad \text{для всех } \xi \in \gamma, \tag{1.3}$$

где $\omega(\xi)$ — матрица $p \times r$, столбцы которой образуют базис пространства V_M.

Рассматривается граничная задача 1: найти решения $u \in \widetilde{K}$ системы (1.1), удовлетворяющие условию

$$bu\,|_{\gamma} = \varphi, \tag{1.4}$$

где $\varphi(\xi)$ — функциональный столбец высоты r, заданный и удовлетворяющий условию Гельдера вдоль γ; $\widetilde{K}$ — класс функциональных столбцов высоты p, имеющих первые непрерывные производные на S и удовлетворяющих условию Гельдера вдоль γ.

Пусть U — комплексное r-мерное пространство столбцов высоты r. Обозначим $\hat{b}(\xi)$ оператор, определенный на V_M матрицей $b(\xi)$ для $\xi \in \gamma$ и действующий из V_M в U.

Очевидны свойства оператора $\hat{b}(\xi)$:

1) $\hat{b}(\xi)$ определен на всем V_M, линеен и отображает V_M на все пространство U.

2) Оператор $\hat{b}(\xi)$ непрерывно зависит от ξ в том смысле, что $\hat{b}^{-1}(\xi)\, u$ для каждого $u \in U$ непрерывно зависит от ξ. Через $I_V(b)$ обозначим величину, определяемую препятствием к продолжению оператора $\hat{b}(\xi)$ на всю поверхность S с сохранением свойств 1) и 2). $I_V(b)$ [2] — целое число, однозначно определяемое системой (1.1) и матрицей $b(\xi)$. Вычисление величины $I_V(b)$ производим явно через приращения аргументов функций [2].

Теорема 1.

1). *Однородная задача, соответствующая задаче* 1, *имеет конечное число* (k) *линейно-независимых решений.*

2) *Существует конечное число* (m) *функциональных строк* $g_1, \ldots, g_m$, *заданных и непрерывных на* $S \cup \gamma$, *и функциональных строк* $d_1, \ldots, d_m$, *заданных и непрерывных на* γ, *таких, что для разрешимости задачи 1 необходимо и достаточно, чтобы*

$\iint\limits_S g_j f dS + \int\limits_{\gamma} d_j \varphi dl = 0$ ($j = 1, \ldots, m$), *причем пары* (g_j, d_j) *предполагаются линейно-независимыми.*

3) *Индекс* $\varkappa = k - m$ *задачи* 1 *вычисляется по формуле*

$$\varkappa = 2I_V(b) + r\mathrm{X}, \tag{1.5}$$

где X — *эйлерова характеристика поверхности.*

Для доказательства теоремы (§ 3) ниже рассматривается задача 2, имеющая, по-видимому, и самостоятельный интерес.

§ 2. Граничная задача в плоских областях

Пусть D_2 — плоская $(\varrho+1)$-связная область, ограниченная контуром L, состоящим из $(\varrho+1)$ дважды гладких кривых, из которых одна окаймляет остальные, $\bar{D}_2 = D_2 \cup L$ $\bar{D}_1 \subset \bar{D}$ — $(\varrho+n+1)$-связная область, отличающаяся от $\bar{D}_2$ наличием дополнительных n отверстий, ограниченных контуром Γ, состоящим из n замкнутых дважды гладких кривых:

$$\bar{D}_1 = D_1 \cup \Gamma \cup L.$$

Обозначим $\tilde{K}_l$ класс функциональных столбцов высоты p, непрерывных в $\bar{D}_l$, имеющих непрерывную производную в $\bar{D}_l$ и удовлетворяющих условию Гельдера на границе области $\bar{D}_l$.

Задача 2: найти решения $u \in \tilde{K}_1$, $v \in \tilde{K}_2$ системы

$$A^j \frac{\partial u}{\partial \xi^j} + A^0 u = f(\xi), \quad \xi \in D_1, \tag{2.1}$$

$$B^j \frac{\partial v}{\partial \xi^j} + B^0 v = h(\xi), \quad \xi \in D_2, \tag{2.2}$$

удовлетворяющие условию

$$u(\xi) - v(\xi) = 0, \quad \xi \in L, \tag{2.3}$$

и

$$b(\xi)\, u(\xi) = \varphi(\xi), \quad \xi \in \Gamma. \tag{2.4}$$

Здесь $f(\xi)$ $(h(\xi))$ — функциональные столбцы высоты p, удовлетворяющие условию Гельдера в областях $\bar{D}_1$ $(\bar{D}_2)$; $\varphi(\xi)$ — функциональный столбец высоты r, заданный и удовлетворяющий условию Гельдера вдоль Γ; $A^j(B^j)$ $(j = 0, 1, 2)$ — дважды непрерывно дифференцируемая в $\Delta_1 \supset \bar{D}_1$ $(\Delta_2 \supset \bar{D}_2)$ вещественная $p \times p$ матрица. Предполагается, что существуют функции $\xi_k^j(\xi)$ $(j, k = 1, 2)$ $\xi \in L$ такие, что

$$\delta = \xi_1^1 \xi_2^2 - \xi_2^1 \xi_1^2 < 0 \tag{2.5}$$

и матрицы A^j, B^j связаны соотношением

$$B^j = A^k \xi_k^j (j, k = 1, 2). \tag{2.6}$$

Системы (2.1) и (2.2) эллиптические, что означает $\det(A^j \alpha_j) \neq 0$ $(\det(B^j \alpha_j) \neq 0)$ $(j = 1, 2)$ для любых ненулевых векторов (α_1, α_2) и всех точек $\xi \in \Delta_1 (\xi \in \Delta_2)$. $b(\xi)$ — матрица $r \times p$ с элементами, зависящими от точек $\xi \in \Gamma$, и удовлетворяющая условию Гельдера вдоль Γ. Системе (2.1) поставим в соответствие систему уравнений

$$iA^1(\xi)\, w(t) + A^2(\xi) \frac{dw}{dt} = 0, \quad \xi \in D_1, \tag{2.7}$$

а системе (2.2) — систему

$$-iB^1(\xi)\, w(t) + B^2(\xi) \frac{dw}{dt} = 0, \quad \xi \in D_2. \tag{2.8}$$

Предполагается выполненным условие Я. В. Лопатинского [7]

$$\det b(\xi)\, \omega(\xi) \neq 0 \quad \text{для всех} \quad \xi \in \Gamma, \tag{2.9}$$

где $\omega(\xi)$ — матрица $p \times r$, столбцы которой образуют линейно-независимые решения системы (2.7), равные нулю на $+\infty$.

Теорема 2. *При выполнении условия (2.9) имеем:*

1). *Однородная задача, соответствующая задаче 2, имеет конечное число* (k) *линейно-независимых решений.*

2) *Существует конечное число* (m) *функциональных строк* $\overset{(i)}{\mu}_1, \ldots, \overset{(i)}{\mu}_m$ ($i = 1, 2$), *заданных и непрерывных в* D_i *и функциональных строк* $\nu_1, \ldots, \nu_m$, *заданных* и *непрерывных на* Γ, *таких, что для разрешимости задачи 2 необходимо и достаточно, чтобы*

$$\iint\limits_{D_1} \overset{(1)}{\mu}_j f d\xi_1 d\xi_2 + \iint\limits_{D_2} \overset{(2)}{\mu}_j h d\xi_1 d\xi_2 + \int\limits_{\Gamma} \nu_j \varphi dS = 0. \tag{2.10}$$

При этом пары (μ_j, ν_j) $(j = 1, \ldots, m)$ *предполагаются линейно-независимыми.*

3) *Индекс* $\varkappa = k - m$ *задачи 2 вычисляется по формуле*

$$\varkappa = -\frac{1}{\pi}\{[\arg\det\overline{\omega_2'(\xi, 0)}\,\omega_1(\xi, 0)]_L + [\arg\det b(\xi)\,\omega_1(\xi, 0)]_\Gamma\} + r(2 - 2\varrho - n), \tag{2.11}$$

где $\omega_1(\xi, t)$, $\omega_2(\xi, t)$ — *непрерывные устойчивые фундаментальные матрицы* [4] *системы* (2.7) *и* (2.8) *соответственно* (здесь и в дальнейшем штрих и черта над матрицей означают транспортирование и комплексное сопряжение).

Рассматривается вспомогательная задача 3: найти решения $u \in \widetilde{K}_1$, $v \in \widetilde{K}_2$ систем

$$A^j \frac{\partial u}{\partial \xi^j} + A^0 u = 0, \quad \xi \in D_1, \tag{2.12}$$

$$B^j \frac{\partial v}{\partial \xi^j} + B^0 v = 0, \quad \xi \in D_2, \tag{2.13}$$

удовлетворяющие условию

$$u(\xi) - v(\xi) = g(\xi), \quad \xi \in L, \tag{2.14}$$

и условию

$$b(\xi)\,u(\xi) = \varphi(\xi), \quad \xi \in \Gamma, \tag{2.15}$$

где $g(\xi)$ — функциональный столбец высоты p, удовлетворяющий условию Гельдера на L.

Заменой неизвестных функций переходим от задачи 3 к задаче для системы специального [3] вида, а затем к системе сингулярных интегральных уравнений на контуре L, состоящем из L и Γ. Доказывается обратимость основных матриц системы, и, следовательно, система нормально разрешима и ее индекс вычисляется по формуле Н. И. Мусхелишвилли [8].

Обратным переходом к задаче 2, используя известные формулы для индекса первой краевой задачи для систем специального вида [6], доказываем первое и третье утверждения теоремы 2. Аналогично доказательству теоремы 5 из [2] (см. стр. 61) из необходимых и достаточных условий разрешимости системы сингулярных интегральных уравнений получаем (2.10), что завершает доказательство теоремы 2.

§ 3. Нормальная разрешимость и индекс задачи 1

Назовем специальной систему координат класса 3 [8] на поверхности $\sigma \in S$, удовлетворяющую следующим требованиям:

1) поверхность σ покрывается двумя открытыми множествами σ_i ($i = 1, 2$), и для каждого σ_i задается гомеоморфное отображение Ψ_i плоской

области Δ_i (см. § 2) на σ_i, причем край поверхности $\gamma \in \sigma_1$ и $\Psi_1^{-1}(\gamma) = \Gamma$;

2) $\Psi_1(D_1) \cup \Psi_2(D_2) = S$;

3) $\Psi_1(D_1) \cap \Psi_2(D_2) = 0$;

4) $\Psi_1(D_1) \cap \Psi_2(\overline{D}_2) = L$;

5) $\Psi_1^{-1}\Psi_2(\xi) = \xi$ для всех $\xi \in L$.

Учитывая, что поверхность S гомеоморфна сфере с (ϱ) ручками и (n) отверстиями, легко видеть возможность выбора на $\sigma \supset S$ специальной системы координат.

В специальной системе координат задача 1 приводит к задаче 2 (ниже показано, что различие классов $\widetilde{K}_i$ и $\widetilde{K}$ $(i = 1, 2)$ в задачах 1 и 2 несущественно).

Используя теорему 2, докажем теорему 1.

Пусть u — решение задачи 1. Обозначим $\overset{(i)}{u}$ выражение столбца $u (i=1, 2)$ в координатах на σ_i. Очевидно, $\overset{(i)}{u}$ решение задачи 2.

Обратно, пусть $\overset{(1)}{u}$ и $\overset{(2)}{u}$ — решения задачи 2. Столбцы $\overset{(i)}{u}$ определены в области D_i. Чтобы доопределить их в области $\Delta_i' = \Psi_i^{-1}(S \cap \sigma_i)$, рассмотрим отображение $\Psi = \Psi_2^{-1}\Psi_1$.

В специальной системе координат на $\sigma \supset S$ отображения Ψ и Ψ^{-1} переводят любую точку области $\Delta_1' \setminus \overline{D}_1$ в точку области $\overline{D}_2$ и всякую точку области $\Delta_2 \setminus \overline{D}_2$ — в точку области $\overline{D}_1$, что следует из свойств 2 и 3 специальной системы координат.

Доопределим столбцы $\overset{(i)}{u}$ $(i = 1, 2)$ в области $\Delta_i' \setminus \overline{D}_i$ $(i = 1, 2)$, положив

$$\overset{(1)}{u}(\xi) = \overset{(2)}{u}[\Psi(\xi)] \quad \text{для} \quad \xi \in \Delta_1' \setminus \overline{D}_2,$$

$$\overset{(2)}{u}(\xi) = \overset{(1)}{u}[\Psi^{-1}(\xi)] \quad \text{для} \quad \xi \in \Delta_2' \setminus \overline{D}_2.$$

Теперь $\overset{(1)}{u}(\xi)\,[\overset{(2)}{u}(\xi)]$ — непрерывный в $\Delta_1'\,[\Delta_2']$ столбец, имеет непрерывные производные в $\Delta_1 \setminus L\,[\Delta_2' \setminus L]$ и удовлетворяет системе (2.1) [(2.2)] в области $\Delta_1'[\Delta_2']$.

Известным образом с применением фундаментальных матриц доказывается, что $\overset{(1)}{u}(\xi)$ и $\overset{(2)}{u}(\xi)$ имеют непрерывные производные и удовлетворяют системам (2.1) и (2.2) в Δ_1' и Δ_2' соответственно.

Теперь, очевидно, что из теоремы 2 следует первое утверждение теоремы 1).

Далее определим на S систему строк

$$g_j = \begin{cases} (EG - F^2)^{-\frac{1}{2}} \overset{(1)}{\mu}_j[\Psi_1^{-1}(x)], & x \in \Psi_1(D_1), \\ (EG - F^2)^{-\frac{1}{2}} \overset{(2)}{\mu}_j[\Psi_2^{-1}(x)], & x \in \Psi_2(D_2); \end{cases}$$

$$(j = 1, \ldots, m)$$

$$d_j = \left[E\left(\frac{d\xi_1}{dS}\right)^2 + 2F\left(\frac{d\xi_1}{dS}\right)\left(\frac{d\xi_2}{dS}\right) + G\left(\frac{d\xi_2}{dS}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \nu_j[\Psi_1^{-1}(x)], \quad x \in \gamma,$$

где E, G, F — гаусовы коэффициенты поверхности.

Теперь очевидно, что из теоремы 2 следует утверждение 2) теоремы 1 и индекс задачи 1 вычисляется по формуле (2.11).

Далее, если вычислить величину $I_V(b)$ (см. § 1) по правилу, указанному в [2] в специальной системе координат, то

$$I_V(b) = -\frac{1}{2\pi}[\arg\det b(\xi)\,\omega_1(\xi, 0)]_\Gamma - \frac{1}{2\pi}[\arg\det \overline{\omega_2'(\xi, 0)}\,\omega_1(\xi, 0)]_L.$$

Отсюда и учитывая, что эйлерова характеристика X поверхности S равна $X = 2 - 2\varrho - n$, видим, что из (2.11) следует (1.5).

Теорема 1 доказана.

В заключение выражаю благодарность А. И. Вольперту за руководство при выполнении данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Агранович, А. С. Дынин, Общие краевые задачи для эллиптических систем в многомерной области, ДАН СССР, т. 141, № 3, 1962, 569.
2. А. И. Вольперт, Об индексе и нормальной разрешимости граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости, Тр. Московск. матем. об-ва, т. 10, 1961, 41.
3. А. И. Вольперт, Нормальная разрешимость граничных задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений на плоскости, Теор. и прикл. матем., вып. 1, 1958, 28.
4. А. И. Вольперт, Эллиптические системы на сфере и двумерные сингулярные интегральные уравнения, Матем. сб. (дополнит. вып.), 1962.
5. А. И. Вольперт, О первой краевой задаче для эллиптических систем дифференциальных уравнений, ДАН СССР, т. 127, № 3, 1959, 487.
6. А. И. Вольперт, Сб. аннот. научн. раб. Львовск. лесотехнич. ин-та, вып. 2, 1961, 52.
7. Я. Б. Лопатинский, Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям, Укр. матем. ж., т. V, № 2, 1953, 123—151.
8. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Гостехиздат, М.—Л., 1946.
9. Н. Стинрод, Топология косых произведений, ИЛ, М., 1953.

Поступила 25.II 1963 г.
Львов