1965 УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ т. XVII № 1
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

О непрерывных отображениях плоских областей

Ю. Ю. Трохимчук

В настоящей заметке элементарными средствами доказываются некоторые свойства нульмерных отображений плоских областей.

Непрерывное отображение $w = f(z)$, $z \in D$ называется нульмерным, если полный прообраз любой точки $w \in f(D)$ является (замкнутым) нульмерным множеством, т. е. не содержащим собственно континуума.

Докажем сначала известную теорему о том, что для такого отображения множество $f(D)$ содержит внутренние точки, но без использования тонких результатов теории размерности. Для этого воспользуемся следующим легко доказываемым [1] геометрическим свойством произвольного нигде не плотного плоского множества P: пусть z_0 — какая-либо точка плоскости (z_0 может не принадлежать P); через $P(r)$ обозначим пересечение P с окружностью $\Gamma_r : | z - z_0 | = r$; тогда существует множество значений r всюду второй категории на полуоси $(0, +\infty)$, таких, что для каждого из этих r множество $P(r)$ нигде не плотно на Γ_r.

Теорема 1. *Пусть $w = f(z)$ — непрерывное нульмерное отображение области D. Тогда существует открытое всюду плотное в D множество D', образ которого есть открытое множество на плоскости w.*

Доказательство. Покажем сначала, что образ K_1 любого замкнутого круга $K \subset D$ содержит внутренние точки.

Предположим противное; тогда $K_1 = f(K)$ явится нигде не плотным замкнутым множеством с диаметром $d > 0$. Пусть $w_0 \in K_1$ — произвольная точка, и $r < \frac{d}{2}$ такое, что $K_1(r)$ есть замкнутое всюду разрывное множество. Так как отображение $w = f(z)$ нульмерно, то и прообраз $k_1 = f^{-1}[K_1(r)]$ является нульмерным, а потому он не разбивает круга K, т. е. $K \setminus k_1$ связно; с другой стороны, образ этого связного множества есть явно не связное множество $K_1 \setminus K_1(r)$, чего не может быть в силу непрерывности $f(z)$.

Возьмем теперь открытое ядро D_1' образа $D_1 = f(D)$, и пусть D' — прообраз D_1' в D. Из непрерывности $f(z)$ следует открытость D', а из доказанного выше — плотность D' в D.

Теорема 1 доказана.

Приведем некоторые следствия.

Следствие 1. Гомеоморфный образ плоского нигде не плотного компактного множества также нигде не плотен.

В самом деле, очевидно, что гомеоморфизм есть нульмерное отображение.

Следствие 2. Степень гомеоморфизма области равна ± 1.

В самом деле, в книге [2] показано, что если гомеоморф плоской области D содержит внутренние точки, то тогда элементарными средствами легко доказать, что степень гомеоморфизма D равна ± 1.

С л е д с т в и е 3. Нульмерный образ $f(D)$ всей области D есть множество всюду второй категории в своем замыкании $\overline{f(D)}$ и, тем более, в себе.

В самом деле, образ $f(D)$ содержит плотное в нем, а потому и в $\overline{f(D)}$, открытое на плоскости множество, а дополнением к нему в $\overline{f(D)}$ служит множество, замкнутое и нигде не плотное (также в $\overline{f(D)}$).

Тем самым мы можем говорить о категории в $f(D)$.

Все это нетрудно обобщить и на случай n-мерного эвклидова пространства.

Дальнейшие наши рассмотрения используют понятие степени отображения, определенной в [3].

Докажем следующее предложение.

Т е о р е м а 2. *Пусть $w = f(z)$ — непрерывное нульмерное отображение плоской области D. Степень $\gamma(z)$ не может равняться нулю для всех точек $z \in D$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства найдем сначала такую точку $z_0 \in D$ и простую замкнутую ломаную $\lambda_0 \subset D$, содержащую z_0 внутри, что $\gamma(\lambda_0, f, f(z_0)) \neq 0$ (определение γ см. [3]).

Пусть $z \in D$ и $w = f(z)$. Рассмотрим ε-окрестность $V_\varepsilon(w)$ точки w и ее прообраз в D; компоненту этого прообраза, содержащую точку z, обозначим через $U_\varepsilon(z)$.

Из нульмерности f следует, что при $\varepsilon \to 0$ диаметр $U_\varepsilon(z)$ также стремится к нулю.

Выберем теперь такое ε, чтобы $\overline{U_\varepsilon(z)} \subset D$; обозначим круг $V_\varepsilon(w)$ через V, область $U_\varepsilon(z)$ — через U, а их границы — соответственно V_g и U_g. Тогда $f(U_g) \subset V_g$ [3]; в самом деле, если бы существовала точка $\tilde{z} \in U_g = \bar{U} \setminus U$, такая, что $\tilde{w} = \tilde{f}(z) \in V$, то из определения U следовало бы, что $\tilde{z} \in U$ и $\notin \bar{U} \setminus U$, чего не может быть.

Возьмем замыкание $\bar{U}$ области U. Его дополнение относительно расширенной плоскости комплексного переменного z есть некоторое открытое множество. Неограниченную компоненту этого множества обозначим через H; так как $\bar{U}$ — континуум, то область H односвязна. Ясно, что граница $H_g \equiv \Gamma$ области H есть часть границы U_g области U и делит плоскость на две области — H и $U_0 \supset U$, являясь их совместной границей.

Пусть $z_1 \in \Gamma$ — произвольная достижимая изнутри U_0 граничная точка; так как $f^{-1}f(z_1)$ — замкнуто и всюду разрывно в D, то на Γ найдется другая достижимая (из U_0) точка z_2, такая, что $z_2 \notin f^{-1} f(z_1)$.

Соединим z_1 и z_2 простой дугой l, расположенной, кроме концов, внутри U_0; одну из (односвязных) областей, на которые поперечное сечение l разбивает U_0, обозначим через G. Граница G_g области G содержит отрезок $\Gamma_1 \subset \Gamma$ простых концов области U_0 «между» точками z_1 и z_2; образ этого отрезка есть некоторая дуга γ_1 на окружности V_g. Можно предположить, что γ_1 не совпадает со всей окружностью V_g: этого можно добиться, взяв «меньший» отрезок Γ_1. Образы точек z_1, $z_2 \in \Gamma_1$ являются различными точками w_1, w_2 дуги γ_1 (вообще не совпадающими с ее концами); из связности Γ_1 следует, что дуга $\overset{\frown}{w_1 w_2} \subset \gamma_1$.

Пусть $\varrho(w_1, w_2) = 4\,d > 0$. Возьмем круги $K(z_1)$ и $K(z_2)$ столь малых радиусов, чтобы диаметры их образов были $< d$, а также меньше половины расстояния между концами γ_1; тогда на $\overset{\frown}{w_1 w_2}$ имеется дуга γ_1' диаметра $> 2\,d$, лежащая вне этих образов. Вместо поперечного сечения l области U_0 построим теперь другое следующим образом. Внутри кругов $K(z_1)$, $K(z_2)$ выберем соответственно точки z', z'', принадлежащие *уже области* $U \subset U_0$: это возможно, так как $\Gamma \subset U_g$. Соединим эти точки простой ломаной l', также расположенной *внутри* U; дополнив l' простыми дугами $\overset{\frown}{z' z_1}$ и $\overset{\frown}{z'' z_2}$, лежащими внутри $K(z_1)$ и $K(z_2)$, придем к другому поперечному сечению

$\overline{z_1 z_2} = \lambda$ области U_0. Отметим, что образ ломаной $l' \subset U$ есть некоторая непрерывная кривая L' *внутри* круга V (по определению U).

Возьмем центр w_3 дуги $\gamma_1' \subset \gamma_1$ и некоторую точку $z_3 \in \Gamma_1$, соответствующую ей при отображении $w = f(z)$. Если $\Lambda = f(\lambda)$, то ясно, что $\varrho(w_3, \Lambda) = 2\alpha > 0$.

Пусть $\{z^{(q)}\}$ $(q = 1, 2, \ldots)$ — последовательность точек $U \cap G$, сходящихся к z_3; тогда образы $w^{(q)} = f(z^{(q)})$ лежат *внутри* круга V и сходятся к $w_3 \in \gamma_1'$. Начиная с некоторого q, все $w^{(q)}$ лежат в α-окрестности w_3, и, следовательно, для них $\varrho(w^{(q)}, \Lambda) > \alpha$. Одну из точек $w^{(q)}$ обозначим w_0, а соответствующую ей точку $z^{(q)}$ — через z_0.

Пусть $\varrho(w_0, V_g) = 2\varepsilon'$, $\varrho(z_0, G_g) = 2\delta'$ и $\varrho(l', G_g) = 2\delta''$.

В силу равномерной непрерывности (в некоторой окрестности $\overline{U}_0$) отображения f найдется $\delta''' > 0$, такое, что образ множества диаметра $< \delta'''$ имеет диаметр $< \varepsilon$: здесь $\varepsilon > 0$ берется меньше ε' и половины расстояния между концами дуги γ_1.

Возьмем $\delta = \min\{\delta', \delta'', \delta'''\}$ и конечное покрытие континуума Γ_1 кругами $k(z_m)$ $(m = 1, 2, \ldots, m_0)$, $z_m \in \Gamma_1$, причем радиусы этих кругов меньше δ, при этом $k(z_1) \subset K(z_1)$ и $k(z_2) \subset K(z_2)$. Так как Γ_1 связно, то $U(\Gamma) = \bigcup_m k(z_m)$ есть область; по построению образ этой области лежит в ε-окрестности дуги γ_1. Соединим точки z_1, z_2 простой ломаной $\overline{z_1 z_2} \subset (\Gamma)$; эта ломаная не пересекается с l'. Концы l' и $\overline{z_1 z_2}$, лежащие в кругах $K(z_1)$ и $K(z_2)$, соединяем теперь ломаными так, чтобы они принадлежали этим кругам и вместе с l' и $\overline{z_1 z_2}$ образовали простую замкнутую ломаную λ_0.

Двигаясь в каком-либо направлении вдоль λ_0, нетрудно показать, что $\gamma(\lambda_0, f, f(z_0)) = \pm 1$, т. е. $\neq 0$; пусть (λ_0) — область, ограниченная λ_0. Если теперь в каждой точке $z \in f^{-1}f(z_0)$, лежащей внутри λ_0, степень $\gamma_\varepsilon(z) = 0$ при $\varepsilon < \varepsilon(z)$, то применив построение леммы 2 из [3], мы заключим множество $f^{-1}f(z_0) \cap (\lambda_0)$ в конечную систему замкнутых многоугольников $U_p = U(z_p)$ $(p = 1, 2, \ldots, p_0)$, $z_p \in f^{-1}f(z_0)$, попарно на пересекающихся, причем диаметр U_p меньше $\varepsilon(z_p)$; следовательно, $\gamma(U_p, f, f(z_0)) = 0$. Но тогда и

$$\gamma(\lambda_0, f, f(z_0)) = \sum_{p=1}^{p_0} \gamma(U_p, f, f(z_0)) = 0,$$

что противоречит доказанному выше.

Теорема 2 доказана.

Упомянутую в ее доказательстве лемму 2 из [3] легко уточнить и мы ее сформулируем сейчас в виде отдельной теоремы (и сразу для R^n, при всех $n \geqslant 1$).

Теорема 3. *Пусть $f: D \to R_1^n$ нульмерно и положительно ориентировано во всех точках $x \in f^{-1}f(x_0)$, $x_0 \in D$, т. е. ε-степень $\gamma_\varepsilon(x) \geqslant 0$ при $\varepsilon < \varepsilon(x)$. Тогда для всех этих точек определена степень $\gamma(x)$, причем множество точек, в которых $\gamma > 0$, является изолированным в D.*

Аналогичное предложение имеет место и для отрицательно ориентированного f.

Доказательство. В силу леммы 2 [3] в наших условиях изолированным в D является подмножество тех точек $x' \in f^{-1}f(x_0)$, в которых $\gamma_\varepsilon(x') > 0$ для бесконечной последовательности (зависящей от x') значений ε, стремящихся к нулю (следовательно, в остальных точках $f^{-1}f(x_0)$ отображение f имеет степень $\gamma = 0$). Покажем, что в этих точках определена степень $\gamma(x') > 0$.

Пусть $P^{(\varepsilon_0)} \equiv U(x')$, $\varepsilon_0 < \varepsilon(x')$, — полиэдральная окрестность, содержащая единственную такую точку x', причем

$$\gamma(U, f, f(x')) = \gamma_0 > 0,$$

и пусть $P_1 \equiv U_1 \subset U(x')$ — любая другая такая окрестность. Так как в области $U \setminus U_1$ содержатся лишь точки $f^{-1}f(x_0)$, в которых $\gamma = 0$, то снова применяя построение леммы 2, найдем конечное покрытие множества $f^{-1}f(x_0) \cap U$ попарно не пересекающимися полиэдральными окрестностями $U_1 \equiv P_1, U_2(x_2), \ldots, U_{p_0}(x_{p_0})$, такими, что диаметр $U_p(x_p)$, $p \geqslant 2$, меньше $\varepsilon(x_p)$. Поэтому $\gamma(U_p, f, f(x_0)) = 0$, и, следовательно,

$$\gamma_0 = \gamma(U, f, f(x_0)) = \sum_{p=1}^{p_0} \gamma(U_p, f, f(x_0)) = \gamma(P_1, f, f(x_0)),$$

т. е. $\gamma_\varepsilon(x')$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, не зависит от ε, что и требовалось.

Так же легко получить (прямо из определения γ [3]) некоторое обращение этой теоремы: если в точке $x_0 \in D$ определена степень $\gamma(x_0)$, то найдется окрестность $U(x_0)$, такая, что во всех точках порции $f^{-1}f(x_0) \cap U$ отображение f ориентировано одинаково и, следовательно (теорема 3), в каждой ее точке определена степень; при этом если $\gamma(x_0) = 0$, то всюду на этой порции $\gamma = 0$. Отсюда можно вывести следующее утверждение: если степень определена всюду на $f^{-1}f(x)$, $x \in D$, то множество $\{x' : \gamma(x') \neq 0\}$ изолировано в D.

Из доказанной выше теоремы 2 вытекает, что если f нульмерно, то существует всюду плотное в D множество точек z, в каждой из которых $\gamma_\varepsilon(z) \neq 0$ для бесконечной последовательности (зависящей от z) значений ε, стремящихся к нулю.

В силу леммы 1 в [3] отсюда вытекает, что для нульмерного отображения $f: D \to R_1^2$ всегда имеется всюду плотное в D множество точек, в каждой из которых f открыто. Именно этот факт, — а также и другие, с ним связанные, — мы сейчас выведем непосредственно.

Итак, пусть $f: D \to R_1^2$ непрерывно и нульмерно. Обозначим через F_n ($n = 1, 2, \ldots$) множество всех точек $z' \in D$, таких, что $f(z')$ является граничной точкой для образа ε-окрестности $U_\varepsilon(z')$ *при любом* $\varepsilon < \dfrac{1}{n}$. Покажем, что F_n замкнуто в D. Пусть $z_k \in F_n$ и $z_k \to z_0 \in D$; возьмем $U_\varepsilon(z_0)$ при $\varepsilon < \dfrac{1}{n}$ и выберем $\delta > 0$ столь малым, чтобы $\varepsilon + \delta < \dfrac{1}{n}$. Начиная с некоторого k, имеем: $U_\varepsilon(z_0) \subset U_{\varepsilon+\delta}(z_k)$ и $z_k \in U_\varepsilon(z_0)$; поэтому точки $f(z_k)$ (для этих k) тем более являются граничными для образа $U_\varepsilon(z_0)$. Но $z_k \to z_0$, следовательно, $f(z_k) \to f(z_0)$, а значит, $f(z_0)$ есть граничная точка для образа $U_\varepsilon(z_0)$, т. е. $z_0 \in F_n$, что и нужно.

Изучим образ множества F_n. Пусть $z' \in F_n$; возьмем порцию F_n, лежащую в замкнутом круге $k(z')$ радиуса $\dfrac{1}{3n}$. Из определения F_n ясно, что образ каждой точки этой порции (при отображении $f: k(z') \to R_1^2$) является граничной для образа всего круга $k(z')$, и, следовательно, образ порции $F_n \subset k(z')$ нигде не плотен на плоскости w. Беря не более чем счетное покрытие всего множества F_n такими же кругами, убедимся, что образ его есть множество (типа F_σ) первой категории в $f(D)$ (см. следствие 3 теоремы 1). Между прочим, отсюда и из теоремы 1 следует, что F_n, а также $f^{-1}f(F_n)$ нигде не плотны в D ($n = 1, 2, \ldots$).

Наконец, образ множества $\mathfrak{F} = \bigcup\limits_n F_n$ есть также множество $\mathfrak{F}_1 \subset f(D)$ первой категории. Множеству $\mathfrak{G}_1 = f(D) \setminus \mathfrak{F}_1$ второй категории в точности соответствует в D множество $\mathfrak{F} = D \setminus \bigcup\limits_n f^{-1}f(F_n)$, также второй категории в D. По построению $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}_1$ обладают свойствами, которые мы сформулируем в виде отдельной теоремы.

Теорема 4. *Если $f: D \to R_1^2$ нульмерно, то в $f(D)$ существует множество $\mathfrak{G}_1$ всюду второй категории, такое, что:* 1) $\mathfrak{G} = f^{-1}(\mathfrak{G}_1)$ *есть так-*

же множество всюду второй категории в D и 2) любой точке $w' \in \mathfrak{G}_1$ соответствуют в D только такие точки z', в каждой из которых f открыто.

(Конечно, эта теорема верна и для R^n при любом n).

Пусть теперь $F_n' (n = 1, 2, \ldots)$ — множество всех точек $z' \in D$, в которых $\gamma(\lambda, f, f(z')) = 0$ для всех ломаных λ в $\frac{1}{n}$-окрестности $U(z')$; покажем, что F_n' замкнуто. Пусть $z_k \in F_n'$ и $z_k \to z_0 \in D$, а $U(z_k)$ и $U(z_0)$ — $\frac{1}{n}$-окрестности. Возьмем произвольную простую замкнутую ломаную $\lambda \subset U(z_0) \setminus f^{-1}f(z_0)$. В каждом из кругов $U(z_k)$ возьмем ломаную λ_k, полученную параллельным переносом из λ и расположенную так же, как и λ внутри $U(z_0)$; области, ограниченные этими ломаными, обозначим (λ_k) и (λ). Начиная с некоторого k множества $(\lambda_k) \cap f^{-1}f(z_k)$ и $(\lambda) \cap f^{-1}f(z_0)$ попадут внутрь пересечения областей (λ_k) и (λ), а потому (для этих k): $\gamma(\lambda, f, f(z_0)) = \gamma(\lambda_k, f, f(z_k)) = 0$ [4]. Итак, $z_0 \in F_n'$, что и требовалось.

Теперь, в силу теоремы 2, каждое F_n' нигде не плотно в D.

Легко видеть, что $F_n' \supset F_n$, где F_n определены в условиях теоремы 4.

Покажем сейчас, что образ открытого множества $G_n' = D \setminus F_n'$ есть открытое множество (и, конечно, плотное в $f(D)$). Пусть $z' \in G_n'$; тогда в $\frac{1}{n}$-окрестности $U(z')$ найдется замкнутая ломаная λ, для которой $\gamma(\lambda, f, f(z')) \neq 0$. Поэтому и для всех точек некоторой окрестности $V(w')$ точки $w' = f(z')$ также будем иметь $\gamma(\lambda, f, w') \neq 0$. Эту окрестность возьмем столь малой, чтобы ее прообраз внутри λ не пересекался с F_n', т. е. лежал в G_n': это возможно в силу нульмерности f. На основании теоремы существования корней [5] $V(w')$ принадлежит образу G_n', что и нужно. Отсюда вытекает

Теорема 5. *Если $f: D \to R_1^2$ нульмерно, то в D существует множество $\mathfrak{G}'$ всюду второй категории (и типа G_δ) такое, что: 1) $\mathfrak{G}_1' = f(\mathfrak{G}')$ есть также множество всюду второй категории в $f(D)$ (и типа G_δ) и 2) в каждой точке $z' \in \mathfrak{G}'$ ε-степень $\gamma_\varepsilon(z') \neq 0$ для бесконечной последовательности (зависящей от z') значений ε, стремящихся к нулю.*

Все это уточняет следствие из теоремы 2.

Приведем еще одно простое утверждение.

Теорема 6. *Если нульмерное отображение $f: D \to R_1^2$ обладает одним из следующих свойств (для всех точек $z \in D$):*

1) $\gamma_\varepsilon(z) \neq 0$ *для бесконечной последовательности (зависящей от z) значений ε, стремящихся к нулю;*

2) $\gamma_\varepsilon(z) \geqslant 0$ (*или* $\gamma_\varepsilon(z) \leqslant 0$) *для* $\varepsilon < \varepsilon(z)$, т. е. f *определенно ориентировано в D, то оно обладает и другим, являясь при этом внутренним отображением (по Стоилову).*

Доказательство. Если выполнено условие 1), то f открыто в D [3], а так как оно и нульмерно, то является внутренним.

Пусть теперь f положительно ориентировано в D. По теореме 3 всюду в D определена степень γ, а по теореме 2 точки, в которых $\gamma > 0$, образуют всюду плотное в D множество. Покажем, что и в этом случае f открыто в D.

Допустим, что это не так; тогда для некоторой точки $z_0 \in D$ и ее окрестности $U(z_0)$, $\bar{U} \subset D$, точка $w_0 = f(z_0)$ явится граничной для замкнутого множества $f(\bar{U})$. Следовательно, $\gamma(z_0) = 0$. Пусть $\lambda \subset U$ — замкнутая ломаная, для которой $\gamma(\lambda, f, f(z_0)) = 0$. Образ $\Lambda = f(\lambda)$ не содержит точки $w_0 = f(z_0)$. Возьмем круг $V(w_0)$, не пересекающийся с Λ; тогда для всех точек $w \in V$ имеем $\gamma(\lambda, f, w) = 0$. В круге V выберем точку w', которой внутри λ соответствуют точки со степенью $\gamma > 0$; по теореме 3 таких точек будет конечное число: $z_1^1, \ldots, z_{s_0}'$.

Проводя теперь, как и выше, построение леммы 2 [3], найдем такое конечное покрытие множества $f^{-1}(w') \cap U$ многоугольниками $U(z'_1), \ldots, \ldots, U(z'_{s_0})$, что

$$\gamma(\lambda, f, w') = \sum_{s=1}^{s_0} \gamma(U(z'_s), f, w') > 0,$$

что противоречит выбору $V(w_0)$.

Теорема 6 доказана.

Нетрудно показать на простых примерах, что в условии 2) недостаточно требовать, чтобы $\gamma_\varepsilon \geqslant 0$ лишь для некоторых значений $\varepsilon \to 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Ю. Трохимчук, Непрерывные отображения и условия моногенности, Приложение, Физматгиз, М., 1963.
2. L. V. Ahlfors and L. Sario, Riemann surfaces, Princeton Univ. Press, 1960.
3. Ю. Ю. Трохимчук, О непрерывных отображениях областей эвклидова пространства, УМЖ, XVI, № 2, 1964, 196—211.
4. А. М. Роднянский, О непрерывных дифференцируемых отображениях открытых множеств, Матем. сб., т. 36 (78), 1955, 233—262.
5. П. С. Александров, Комбинаторная топология, Гостехиздат, М.—Л., 1947.

Поступила 2.II 1963 г.

Киев