Распространение теоремы П. И. Романовского на один класс двойных сингулярных интегралов

М. А. Духовный

Пусть суммируемой, периодической с периодом 2π относительно каждого аргумента, функции $f(x, y)$ соответствует двойной ряд Фурье — Лебега

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{m,n} \, e^{i(mx+ny)}. \tag{1}$$

Хорошо известен метод суммирования ряда (1) сферическими средними Рисса (см., например, [3]). С этим методом связана функция вида

$$S_\tau(p, x, y, t_1, t_2) = \begin{cases} \dfrac{p}{\pi\tau^2}\left(1-\dfrac{(t_1-x)^2+(t_2-y)^2}{\tau^2}\right)^{p-1}, & \text{если } (t_1-x)^2+(t_1-y)^2<\tau^2, \\ 0, & \text{если } (t_1-x)^2+(t_2-y)^2 \geqslant \tau^2. \end{cases} \tag{2}$$

Определение. Функция $S_\tau(\varrho)$, $\varrho=\sqrt{(t_1-x)^2+(t_2-y)^2}$, называется симметричным ядром, если она при $\tau \leqslant \varrho$ равна нулю и удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\tau\to 0}\iint_{\varrho<\tau} S_\tau(\varrho)\, dt_1 dt_2 = 1\,. \tag{3}$$

Легко проверить, что функция (2) является симметричным ядром.

Интегралы вида

$$\iint_{\varrho<\tau} S_\tau(\varrho) f(t_1 t_2)\, dt_1 dt_2, \tag{4}$$

где $S_\tau(\varrho)$ — симметричное ядро, называется двойным сингулярным интегралом.

Предполагается, что интегралы (3) и (4) существуют.

Ниже нам будет удобно интегралы (4) рассматривать в полярных координатах

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\tau} S_\tau(\varrho) f_{xy}(\varrho, \varphi)\, \varrho d\varrho d\varphi\,,$$

где

$$f_{x,y}(\varrho, \varphi) = f(x+\varrho\cos\varphi,\ y+\varrho\sin\varphi).$$

1°. Пусть $\Theta_\tau(\varrho)$ и $\varphi_\tau(\varrho)$ — симметричные и ограниченные при каждом τ ядра.

Теорема 1. *Для того чтобы из*

$$\lim_{\tau\to 0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\tau}\Theta_\tau(\varrho) f_{x,y}(\varrho,\varphi)\,\varrho d\varrho d\varphi = 0, \qquad \Theta_\tau(\varrho)\geqslant 0\,, \tag{5}$$

следовало

$$\lim_{\tau\to 0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\tau}\varphi_\tau(\varrho) f_{x,y}(\varrho,\varphi)\,\varrho d\varrho d\varphi = 0 \tag{6}$$

для любой суммируемой функции $f(x, y)$, *достаточно, чтобы ядро* $\varphi_\tau(\varrho)$ *было представимо через ядра* $\Theta_\tau(\varrho)$ *в виде*

$$\varphi_\tau(\varrho) = \int_\varrho^\tau \Theta_u(\varrho)\,\Phi_\tau(u)\, du\,, \qquad \varrho<\tau\,, \tag{7}$$

где $\Phi_\tau(u)\geqslant 0$, *и на* $[0, \tau)$ *выполнялось условие*

$$\int_0^\tau \Phi_\tau(u)\, du < K \tag{8}$$

(K *не зависит от* τ*).*

Доказательство. Интеграл в (6) с помощью соотношения (7) может быть представлен в виде

$$\varphi(f) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\tau}\varphi_\tau(\varrho) f_{x,y}(\varrho,\varphi)\varrho d\varrho d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\tau}\left[\int_\varrho^\tau \Theta_u(\varrho)\,\Phi_\tau(u)\, du\right] f_{x,y}(\varrho,\varphi)\,\varrho d\varrho d\varphi\,.$$

Очевидно, что при выполнении условий теоремы в правой части последнего равенства можно менять порядок интегрирования.

Сделав это, получим

$$\varphi(f) = \int_0^\tau \left[\int_0^{2\pi} \int_0^u \Theta_u(\varrho) f_{x,\,y}(\varrho, \varphi)\, \varrho d\varrho d\varphi \right] \Phi_\tau(u)\, du.$$

Из (5) вытекает, что для любого сколь угодно малого ε, $\varepsilon > 0$, при достаточно малых τ

$$\left| \int_0^{2\pi} \int_0^u \Theta_u(\varrho) f_{x,\,y}(\varrho, \varphi)\, \varrho d\varrho d\varphi \right| < \frac{\varepsilon}{K} \qquad (u < \tau).$$

Следовательно,

$$\left| \int_0^{2\pi} \int_0^\tau \varphi_\tau(\varrho) f_{x,\,y}(\varrho, \varphi)\, \varrho d\varrho d\varphi \right| < \frac{\varepsilon}{K} \int_0^\tau \Phi_\tau(u)\, du < \varepsilon.$$

Последнее неравенство доказывает теорему.

Теорема 2. *Если $\varphi_\tau(\varrho)$ — дифференцируемое по ϱ на $[0, \tau)$ невозрастающее симметричное ядро и $\varphi_\tau(\tau - 0) = 0$, то из*

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\pi\tau^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\tau f_{x,\,y}(\varrho, \varphi)\, \varrho d\varrho d\varphi = 0 \tag{9}$$

следует

$$\lim_{\tau \to 0} \int_0^{2\pi} \int_0^\tau \varphi_\tau(\varrho) f_{x,\,y}(\varrho, \varphi)\, \varrho d\varrho d\varphi = 0, \tag{10}$$

где $f(x, y)$ — любая суммируемая функция.

Доказательство. Заметим прежде всего, что в соотношении (9) рассматривается симметричное ядро

$$\Theta_\tau(\varrho) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\tau^2}, & \text{если } \varrho < \tau, \\ 0, & \text{если } \varrho \geqslant \tau. \end{cases}$$

Далее, для этого ядра соотношение (7) имеет вид

$$\varphi_\tau(\varrho) = \int_\varrho^\tau \frac{1}{\pi u^2} \Phi_\tau(u)\, du.$$

Это интегральное уравнение, как легко проверить, имеет решение

$$\Phi_\tau(u) = -\pi u^2 \frac{d}{du} \varphi_\tau(u).$$

Далее, так как по условию теоремы $\varphi_\tau(\varrho)$ — невозрастающее ядро, то

$$\Phi_\tau(u) \geqslant 0.$$

Покажем, что функция $\Phi_\tau(u)$ удовлетворяет условию (8) теоремы 1. Имеем

$$\int_0^\tau \Phi_\tau(u)\, du = 2\pi \int_0^\tau \varphi_\tau(u)\, u du.$$

Если последнее равенство переписать в виде

$$\int_0^\tau \Phi_\tau(u)\,du = \int_0^{2\pi}\int_0^\tau \varphi_\tau(\varrho)\,\varrho d\varrho d\varphi\,,$$

то, приняв во внимание, что $\varphi_\tau(\varrho)$ является симметричным ядром, получим

$$\lim_{\tau\to 0}\int_0^\tau \Phi_\tau(u)\,du = 1\,.$$

Отсюда следует (8).

Таким образом, выполнены все условия предыдущей теоремы, тем самым доказана и теорема 2.

2°. Если в предельных равенствах (9) и (10) функцию $f_{x,\,y}(\varrho, \varphi)$ заменить на функцию $f_{x,\,y}(\varrho, \varphi) - f(x, y)$, то все изложенное выше сохранит силу.

Принимая во внимание это замечание, а также определение симметричного ядра и возвращаясь к декартовым координатам, получаем следующую теорему, являющуюся распространением известной теоремы П. И. Романовского [1, 2] на двойные сингулярные интегралы с симметричными ядрами.

Теорема 3. *Если $\varphi_\tau(\varrho)$ — дифференцируемое по ϱ на $[0, \tau)$ невозрастающее симметричное ядро и $\varphi_\tau(\tau - 0) = 0$, то для любой суммируемой функции $f(x, y)$ из*

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\pi\tau^2}\iint\limits_{(t_1-x)^2+(t_2-y)^2<\tau^2} f(t_1, t_2)\,dt_1dt_2 = f(x, y) \tag{11}$$

вытекает

$$\lim_{\tau\to 0}\iint\limits_{(t_1-x)^2+(t_2-y)^2<\tau^2} \varphi_\tau(\varrho)\,f(t_1, t_2)\,dt_1dt_2 = f(x, y)\,. \tag{12}$$

Заметим, что для суммируемой функции почти везде имеет место соотношение (11).

Таким образом при выполнении условий теоремы 3 предельное равенство (12) выполняется почти везде.

Пример (К. Чандрасекаран, [3]). Легко видеть, что ядро (2) при $p > 1$ удовлетворяет всем условиям теоремы 3.
Значит, при $p > 1$ для любой суммируемой функции $f(t_1, t_2)$ почти везде имеет место

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{p}{\pi\tau^2}\iint\limits_{(t_1-x)^2+(t_2-y)^2<\tau^2}\left(1-\frac{(t_1-x)^2+(t_2-y)^2}{\tau^2}\right)^{p-1} f(t_1, t_2)\,dt_1dt_2 = f(x, y)\,.$$

Теоремы, изложенные в настоящей заметке, легко распространить на суммируемые функции n переменных и n-кратные сингулярные интегралы ($n > 2$).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, 1950.
2. В. С. Федулов, Некоторые вопросы представления функций сингулярными интегралами, распространенными по области, Уч. зап. Казанск. гос. ун-та, т. 115, кн. 14, 1955.
3. K. Chandrasekharan, On the summation of multiple Fourier series, Proc. London Math., v. 50, № 3, 1948.

Поступила 29.I 1964 г.
Кривой Рог