О представлении положительно определенных ядер через собственные функции разностных выражений

Н. Н. Чаус

В заметке строится интегральное представление положительно определенного ядра дискретного аргумента по общим собственным функциям системы коммутирующих разностных операторов. Центральным вопросом при этом является доказательство того, что соответствующие коммутирующие эрмитовы операторы можно расширить до коммутирующих самосопряженных. Автор основывается на работе Ю. М. Березанского [1]; данная заметка является конкретным примером для общей теории, развитой в [1].

Вводимые ниже пространства $K_{p,\varrho}$ нужно считать обобщением одного пространства, которым пользовались А. Г. Костюченко и Б. С. Митягин [2] при рассмотрении степенной проблемы моментов.

1°. Пусть L — разностное выражение порядка r, действующее на последовательности комплексных чисел $u = (\ldots, u_{-1}, u_0, u_1, \ldots)$. Будем обозначать

$$(Lu)_j = \sum_{\alpha=-r^-}^{r^+} a_\alpha u_{j+\alpha} = \sum_{\alpha=-r^-}^{r^+} a_\alpha (T^\alpha u)_j \quad ((Tu)_j = u_{j+1};\ j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots), \quad (1)$$

где $r = r^+ + r^-$ — фиксированное разложение r на неотрицательные целые числа, a_α — комплексные постоянные коэффициенты, причем $a_{-r^-}, a_{r^+} \neq 0$. Пусть L^+ — формально сопряженное к L выражение*, а $\overline{L}$ — выражение с комплексно сопряженными коэффициентами. Через $\chi_{0,j}(\lambda), \ldots, \chi_{r-1}(\lambda)$ $(j = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$ обозначим фундаментальную систему решений уравнения $Lu - \lambda u = 0$, удовлетворяющую условиям (a целое фиксированное):

$$\chi_{k,j}(\lambda) = \delta_{j,k+a-r^-} \quad (j = a - r^-, \ldots, a + r^+ - 1;\ k = 0, \ldots, r-1).$$

Рассмотрим множество G целочисленных точек $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_n)$ пространства E_n (т. е. $G = G^{(1)} \times \ldots \times G^{(n)}$, где $G^{(k)} = (\ldots, -1, 0, 1, \ldots)$) и на нем положительно определенное (п. о.) комплекснозначное ядро $K = K_{\mathbf{jk}}$ $(\mathbf{j}, \mathbf{k} \in G)$. Иными словами, для этого ядра при любой финитной $\xi = \{\xi_\mathbf{j}\}$ $(\mathbf{j} \in G)$ выполняется условие $\sum_{\mathbf{j},\mathbf{k} \in G} K_{\mathbf{jk}} \xi_\mathbf{j} \overline{\xi}_\mathbf{k} \geqslant 0$. Пополнение финитных на G последовательностей по скалярному произведению $\langle u, v\rangle_K = \sum_{\mathbf{j},\mathbf{k} \in G} K_{\mathbf{jk}} u_\mathbf{k} \overline{v}_\mathbf{j}$ будем обозначать через H_K.

Рассмотрим n разностных выражений $L^{(\nu)}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ типа (1) (здесь для каждого $L^{(\nu)}$ свое $r_\nu = r_\nu^+ + r_\nu^-$ и свои коэффициенты $a_\alpha^{(\nu)}$) и будем считать, что они связаны с ядром K следующим образом:

$$L_{j_\nu}^{(\nu)} K(\mathbf{j}, \mathbf{k}) = \overline{L_{k_\nu}^{(\nu)}} K(\mathbf{j}, \mathbf{k}). \quad (2)$$

Составим из фундаментальных решений $\chi_{k,j}^{(\nu)}$ уравнений $L^{(\nu)} u - \lambda u = 0$ произведение $X_\alpha(\mathbf{j}, \lambda) = \prod_{\nu=1}^{n} \chi_{\alpha_\nu, j_\nu}^{(\nu)}(\lambda_\nu)$ $(\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_n) \in G,\ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in E_n)$, где векторный индекс $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ меняется по целочисленному параллелепипеду A точек с координатами $\alpha_1 = 0, \ldots, r_1 - 1; \ldots; \alpha_n = 0, \ldots, r_n - 1$.

Согласно теоремам 1 и 2 из [1], ядро K будет иметь представление в виде

$$K_{\mathbf{jk}} = \int_{E_n} \sum_{\alpha,\beta \in A} X_\alpha(\mathbf{j}, \lambda) \overline{X_\beta(\mathbf{k}, \lambda)}\, d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \quad (3)$$

с п. о. матрицей $\| d\sigma_{\alpha\beta}(\lambda) \|_{\alpha,\beta \in A}$, если и только если, кроме условия (2),

---

* Т. е. $\Sigma (Lu)_j \overline{v}_j = \Sigma u_j \overline{(L^+ v)_j}$, если хотя бы одна из последовательностей u, v финитна.

выполняется следующее: n эрмитовых операторов в H_K $u \to L^{(\nu)+} u$ ($u \in H^{*}_{K,0}$) допускают расширение в H_K или с выходом в более широкое пространство до системы коммутирующих самосопряженных операторов. Представление (3) будет единственно, если замыкания операторов $u \to L^{(\nu)+} u$ в H_K самосопряжены.

2°. Нами будет доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть п. о. ядро $K = K_{\mathbf{jk}} = K_{j_1,\ldots,j_n;k_1,\ldots,k_n}$ удовлетворяет соотношению* (2) *с разностными выражениями вида* (1), *имеющими постоянные коэффициенты $a_\alpha^{(\nu)}$. Для того, чтобы имело место представление* (3), *в котором матрица $\| d\sigma_{\alpha,\beta}(\lambda) \|_{\alpha,\beta \in A}$ определяется однозначно, достаточно выполнения следующей оценки:*

$$|K_{j_1,\ldots,j_n;k_1,\ldots,k_n}| \leqslant C N^{|j_1|+\ldots+|j_n|+|k_1|+\ldots+|k_n|} |j_1|^{\frac{|j_1|}{\varrho_1}} \ldots |j_n|^{\frac{|j_n|}{\varrho_n}} |k_1|^{\frac{|k_1|}{\varrho_1}} \ldots |k_n|^{\frac{|k_n|}{\varrho_n}},$$

*где $\varrho_\nu = \max(r_\nu^+, r_\nu^-)$. При этом дополнительно предполагается равенство дефектных чисел каждого оператора $u \to L^{(\nu)+} u$ ($u \in H_{K,0}$)***.

Доказательство этого утверждения построено на использовании теоремы 3 [1]. Содержание этой теоремы применительно к нашему случаю следующее: пусть для каждого $\nu = 1, \ldots, n$ имеется пространство $l_2((-\infty, \infty), s^{(\nu)})$, т. е. пространство со скалярным произведением $(u, v)_{l_2(, s^{(\nu)})} = \sum u_j \bar{v}_j s_j^{(\nu)}$. Предположим, что

а) $\| u \|_K \leqslant \| u \|_{\otimes}$ для $u \in H_{K,0}$, где $\| \cdot \|_{\otimes}$ есть норма в пространстве $l_2((-\infty, \infty), s^{(1)}) \otimes \ldots \otimes l_2((-\infty, \infty), s^{(n)})$;

б) для обоих уравнений $\frac{du_t}{dt} \pm i (L_\nu^+)^* u_t = 0$ $(0 \leqslant t < \infty)$, рассматриваемых в $l_2((-\infty, \infty), s^{(\nu)})$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, справедлива единственность слабых решений.

Тогда замыкания операторов $u \to L^{(\nu)+} u$ ($u \in H_{K,0}$) в H_K самосопряжены и их разложения единицы коммутируют. Под L_ν^+ в дифференциальном уравнении нужно понимать замыкание оператора $u \to L^{(\nu)+} u$ ($u \in l_{2,0}$) в $l_2((-\infty, \infty), s^{(\nu)})$.

Сделаем выбор пространств $l_2((-\infty, \infty), s^{(\nu)})$, полагая $s^{(\nu)} = \{s_j\}^{(\nu)} = N^{2|j|} |j|^{\frac{2|j|}{\varrho_\nu}}$, где $\varrho_\nu = \max(r_\nu^+, r_\nu^-)$. Нетрудно проверить что условие а) при этом будет выполняться. Для проверки справедливости условия б) в таких $l_2(, s^{(\nu)})$ воспользуемся принципом Хольмгрена [3]. Для этого рассмотрим цепочку пространств

$$K_{p,\varrho} \subseteq K_{p',\varrho} \subseteq l_2((-\infty, \infty), N^{2|j|} |j|^{\frac{2|j|}{\varrho}}),$$

где $K_{p,\varrho}$ — банахово пространство последовательностей $\varphi = (\ldots, \varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1, \ldots)$ с нормой

$$\| \varphi \|_{p,\varrho} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\varphi_j| p^{|j|} |j|^{\frac{|j|}{\varrho}} < \infty, \; 0 < N < p' < p, \; p, \; \varrho > 0$$

фиксированы (индекс ν для удобства сейчас опущен).

---

* Индекс 0 внизу будет употребляться в дальнейшем для обозначения множества финитных последовательностей рассматриваемого пространства.

** Дефектные числа равны, например, если коэффициенты $a_\alpha^{(\nu)}$ вещественны.

Справедлива следующая лемма.

Лемма. *Если* $\varrho = \max(r^+, r^-)$, $0 < p' < p$ *и* $|\zeta| \leqslant T$, *где* T *достаточно мало, то оператор* $e^{\zeta L}$: $\varphi \to \sum\limits_{q=0}^{\infty} \frac{\zeta^q}{q!}(L^q\varphi)$ *непрерывно действует из пространства* $K_{p,\varrho}$ *в пространство* $K_{p'\varrho}$.

Доказательство. Нужно показать, что для каждого $\varphi \in K_{p,\varrho}$ ряд $\sum\limits_{q=0}^{\infty} \frac{\zeta^q}{q!}(L^q\varphi)_j$ сходится при любом j, полученная последовательность входит в $K_{p',\varrho}$ и

$$\left\| \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\zeta^q}{q!}(L^q\varphi) \right\|_{p',\varrho} \leqslant C\,\|\varphi\|_{p,\varrho}. \tag{4}$$

С этой целью проведем ряд оценок. Для выражения T^α имеем $(\mu = p'/p)$:

$$\|T^\alpha\varphi\|_{p',\varrho} = \sum_j |\varphi_{j+\alpha}|\,p'^{|j|}|\,j\,|^{\frac{|j|}{\varrho}} = \sum |\varphi_{j+\alpha}|\,p^{|j+\alpha|}|\,j+\alpha\,|^{\frac{|j+\alpha|}{\varrho}} \times$$

$$\times \frac{p'^{|j|}|\,j\,|^{\frac{|j|}{\varrho}}}{p^{|j+\alpha|}|\,j+\alpha\,|^{\frac{|j+\alpha|}{\varrho}}} \leqslant \sup_j \left[\mu^{|j|}p^{|j|-|j+\alpha|}\left|\frac{j}{j+\alpha}\right|^{\frac{|j+\alpha|}{\varrho}}|\,j\,|^{\frac{|j|}{\varrho}-\frac{|j+\alpha|}{\varrho}}\right]\|\varphi\|_{p,\varrho} \leqslant$$

$$\leqslant p^{|\alpha|}e^{\frac{|\alpha|}{\varrho}}\sup_j\left[\mu^{|j|}|\,j\,|^{\frac{|\alpha|}{\varrho}}\right]\|\varphi\|_{p,\varrho}.$$

Дальше воспользуемся легко проверяемым неравенством [2]

$$\mu^t t^\sigma \leqslant \left(-\frac{\sigma}{e\ln\mu}\right)^\sigma \ (0 < t,\ \sigma;\ 0 < \mu < 1).$$

Получим

$$\|T^\alpha\varphi\|_{p',\varrho} \leqslant p^{|\alpha|}\left(-\frac{|\alpha|}{\varrho\ln\mu}\right)^{\frac{|\alpha|}{\varrho}}\|\varphi\|_{p,\varrho}.$$

Теперь найдем оценку для $\|L^q\varphi\|_{p',\varrho}$. Выражение L^q будет порядка qr; пусть оно имеет вид $L^q = \sum\limits_{\alpha=-qr^-}^{qr^+} a_\alpha^{(q)}T^\alpha$ $(a_\alpha^{(1)} = a_\alpha)$. Обозначим $A_q = \max\limits_\alpha |a_\alpha^{(q)}|$. Из соотношения $L^q = L\cdot L^{q-1}$ легко следует, что $A_q \leqslant (2r+1)A_1A_{q-1}$ $(q = 2, 3, \ldots)$, откуда $A_q \leqslant (2r+1)^{q-1}A_1^q \leqslant (2r+1)^q A_1^q$ $(q = 1, 2, \ldots)$.

Таким образом,

$$\|L^q\varphi\|_{p',\varrho} \leqslant \sum_{\alpha=-qr^-}^{qr^+} |a_\alpha^{(q)}|\,\|T^\alpha\varphi\|_{p',\varrho} \leqslant A_q \sum_{\alpha=-qr^-}^{qr^+} p^{|\alpha|}\left(-\frac{|\alpha|}{\varrho\ln\mu}\right)^{\frac{|\alpha|}{\varrho}}\|\varphi\|_{p,\varrho} \leqslant$$

$$\leqslant (2r+1)^q A_1^q(2q\varrho+1)\,p^{q\varrho}\left(-\frac{q}{\ln\mu}\right)^q\|\varphi\|_{p,\varrho} = (2q\varrho+1)\times$$

$$\times\left[-\frac{(2r+1)A_1p^\varrho}{\ln\mu}\right]^q q^q\|\varphi\|_{p,\varrho} = C_1^q(2q\varrho+1)q^q\|\varphi\|_{p,\varrho} \ (q = 1, 2, \ldots),$$

где C_1 не зависит от q. Ясно, что эта же оценка справедлива и при $q = 0$.

Благодаря всему этому

$$\left\|\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\zeta^q}{q!}(L^q\varphi)\right\|_{p',\varrho}\leqslant\sum_{q=0}^{\infty}\frac{|\zeta|^q}{q!}\|L^q\varphi\|_{p',\varrho}\leqslant\left[\sum_{q=0}^{\infty}\frac{T^q}{q!}C_1^q(2q\varrho+1)q^q\right]\|\varphi\|_{p,\varrho}.$$

Для достаточно малого T ряд в квадратных скобках будет сходиться. Итак, неравенство (4), а вместе с ним и лемма доказаны. Тем самым будем считать доказанной нашу теорему.

3°. Все предыдущее можно подвергнуть следующему изменению. Под областью $G=G^{(1)}\times\ldots\times\widetilde{G}^{(n)}$, на которой определяется п. о. ядро $K_{j\mathbf{k}}(\mathbf{j},\mathbf{k}\in G)$, будем понимать область, где некоторые $G^{(i)}$ (например, для $i\leqslant m<n$) представляют собой, как и раньше, множества $(\ldots,-1,0,1,\ldots)$, а остальные $G^{(i)}$ $(i=m+1,\ldots,n)$ есть полуоси, т. е. являются множествами $(0,1,2,\ldots)$. Соответственно система n конечноразностных выражений $L^{(\nu)}$ вида (1), для которых условие (2) остается в силе, будет состоять из m выражений, действующих на последовательностях $(\ldots,u_{-1},u_0,u_1,\ldots)$, и тех выражений $L^{(\nu)}$ $(m+1\leqslant\nu\leqslant n)$, которые действуют на полуоси, т. е. на $u=(u_0,u_1,\ldots)$. Для этих выражений при подсчете $(Lu)_j$ $(j=0,\ldots,r^{-1}-1)$ мы дополнительно полагаем $u_{-r^-},\ldots,u_{-1}=0$. Точно также при подсчете $(L^+u)_j$ $(j=0,\ldots,r^+-1)$ полагаем $u_{-r^+},\ldots,u_{-1}=0$.

Фундаментальные решения уравнений $L^{(\nu)}u-\lambda u=0$ $(\nu\geqslant m)$, которые участвуют в формуле (3), могут быть взяты с условиями $\chi_{k,j}(\lambda)=\delta_{j,k-r^-}$ $(j=0,\ldots,r^+-1;\ k=r^-,\ldots,r-1;\ a=0)$. С учетом этих изменений рассматривается представление п. о. ядра $K_{\mathbf{jk}}$ в виде (3). *Остается справедливой доказанная ранее теорема, лишь в формулировке ее следует под* ϱ_ν *понимать* $\varrho_\nu=\max(r_\nu^+,r_\nu^-)$ *для* $\nu=1,\ldots,m$ *и* $\varrho_\nu=r_\nu^+$ *при* $m<\nu\leqslant n$.

Доказательство при этом по сути ничем не отличается от прежнего. Следует лишь для $\nu>m$ заменить ранее введенные пространства $K_{p,\varrho}=l_1\left((-\infty,\infty),\ p^{|j|}|j|^{\frac{|j|}{\varrho}}\right)$ и $l_2\left((-\infty,\infty),\ N^{2|j|}|j|^{\frac{2|j|}{\varrho}}\right)$ на $\hat{K}_{p,\varrho}=l_1\left((0,\infty),\ p^jj^{\frac{j}{\varrho}}\right)$ и $l_2\left((0,\infty),\ N^{2j}j^{\frac{2j}{\varrho}}\right)$. Дальше для таких пространств доказывается аналог леммы п. 2°. При этом в формулировке леммы появляется возможность замены величины $\varrho=\max(r^+,r^-)$ на $\varrho=r^-$. Не проводя доказательства этого подробно, ограничимся проверкой того, что $\|e^{\zeta L}\varphi\|_{p',r^-}<\infty$, где $\varphi\in\hat{K}_{p,r^-}$ $p'<p$. Для этого положим $L=L_++L_-$, где $L_+=\sum\limits_{\alpha=1}^{r^+}a_\alpha T^\alpha$, $L_-=\sum\limits_{\alpha=-r^-}^{0}a_\alpha T^\alpha$, и напишем следующую цепочку неравенств:

$$\|e^{\zeta L}\varphi\|_{p',r^-}=\sum_{j=0}^{\infty}|(e^{\zeta L}\varphi)_j|\,p'^j j^{\frac{j}{r^-}}\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}(e^{|\zeta L|}|\varphi|)_j\,p'^j j^{\frac{j}{r^-}}=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}(e^{|\zeta L_+|+|\zeta L_-|}|\varphi|)_j p'^j j^{\frac{j}{r^-}}\leqslant\sum_{j=0}^{\infty}(e^{\widetilde{|\zeta L_+|}+\widetilde{|\zeta L_-|}}|\widetilde{\varphi}|)_j p'^j j^{\frac{j}{r^-}}=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}(e^{\widetilde{|\zeta L_+|}}\cdot e^{\widetilde{|\zeta L_-|}}|\widetilde{\varphi}|)_j p'^j j^{\frac{j}{r^-}}.$$

Здесь под $|\zeta L|$ нужно понимать замену $\zeta L = \sum c_\alpha T^\alpha$ на $\sum |c_\alpha| T^\alpha$, $|\widetilde{\varphi}| = (\ldots, 0, |\varphi_0|, |\varphi_1|, \ldots)$, а выражения $\widetilde{|\zeta L_-|}$ и $\widetilde{|\zeta L_+|}$ есть соответственно $\sum\limits_{\alpha=-r^-}^{0} |a'_\alpha| \widetilde{T}^\alpha$ и $\sum\limits_{\alpha=1}^{r^+} |a'_\alpha| \widetilde{T}^\alpha$, где $\widetilde{T}$ определяется на последовательностях вида $|\widetilde{\varphi}|$ по правилу задания на всей оси, т. е. $\widetilde{T}$: $(\ldots 0, 0, \varphi_0, \varphi_1, \ldots) \to (\ldots, 0, \varphi_0, \varphi_1, \ldots)$ (в то время как $T(\varphi_0, \varphi_1, \ldots) = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$).

На основании леммы п. 2° легко получить, что $e^{\widetilde{|\zeta L_-|}} |\widetilde{\varphi}| = \widetilde{\psi} = (\ldots, 0, \psi_0, \psi_1, \ldots)$, где $\psi = (\psi_0, \psi_1, \ldots) \in \hat{K}_{p', r^-}$. Теперь можем продолжить цепочку неравенств следующим образом:

$$\sum_{j=0}^{\infty} (e^{\widetilde{|\zeta L_+|}} \widetilde{\psi})_j p'^j j^{\frac{j}{r^-}} = \sum_{j=0}^{\infty} (e^{|\zeta L_+|} \psi)_j p'^j j^{\frac{j}{r^-}}.$$

Так как оператор T: $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots) \to (\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$ является ограниченным в любом пространстве $\hat{K}_{p', t}$ $(t > 0)$, то ограниченными будут там же и операторы $|\zeta L_+|$ и $e^{|\zeta L_+|}$. Поэтому $e^{|\zeta L_+|} \psi \in \hat{K}_{p', r^-}$ и последняя сумма $< \infty$, откуда $\| e^{\zeta L} \varphi \|_{p', r^-} < \infty$, что и требовалось.

Так как лемма при замене $\varrho = \max(r^+, r^-)$ на $\varrho = r^-$ остается справедливой $(\nu > m)$, то отсюда, повторяя рассуждения, проведенные для случая, когда все $G^{(i)} = (\ldots, -1, 0, 1, \ldots)$, получаем справедливость теоремы, в которой $\varrho_\nu = r_\nu^+$ $(\nu > m)$.

В заключение автор благодарит Ю. М. Березанского за помощь при написании данной заметки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. М. Березанский, Одно обобщение многомерной теоремы Бохнера, ДАН СССР, т. 136, № 5, 1961.
2. А. Г. Костюченко, Б. С. Митягин, Положительно определенные функционалы на ядерных пространствах, Тр. Моск. матем. о-ва, т. 9, 1960.
3. И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов, Обобщенные функции, вып. 3, Физматгиз, М., 1958.

Поступила 28.XII 1963 г.
Киев