# О радиусе однолистности одного класса мероморфных функций

*П. Г. Тодоров*

Рассмотрим класс мероморфных функций

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{m_k} \frac{A_{ks}}{(z - a_k)^s}, \tag{1}$$

где $a_k \neq 0$ — полюсы функции (1), а $m_k$ — их кратности. Будем предполагать, что $A_{km_k} \neq 0$. Если для отличных от нуля коэффициентов $A_{ks}$ аргумент отношения $\dfrac{A_{ks}}{(-a_k)^{s+1}}$, $s = 1, 2, \ldots, m_k$, $k = 1, 2, \ldots n$ постоянен и $m$ — наибольшее из чисел $m_k$, то имеет место следующая теорема.

Теорема. *Каждая функция класса* (1) *является однолистной в замкнутом круге*

$$|z| \leqslant \delta \sin \frac{\pi}{2(m+1)}, \tag{2}$$

*где* $\delta = \min\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$.

Число $\delta \sin \dfrac{\pi}{2(m+1)}$ *есть точный радиус однолистности класса* (1).

Для доказательства теоремы используем следующую лемму.

Лемма. *Если* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — *действительные числа* $|p_k| \geqslant \dfrac{1}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *то действительная часть произведения*

$$P(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (1 - z_1)^{p_1} (1 - z_2)^{p_2} \ldots (1 - z_n)^{p_n}, \quad n \geqslant 1, \tag{3}$$

*где всюду взяты главные значения степенных функций, положительна, т. е.* $\operatorname{Re} P(z_1, z_2, \ldots, z_n) > 0$ *при условии, что комплексные числа* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *принадлежат кругу*

$$|z| < \sin \frac{\pi}{2np}, \quad p = \max |p_k|. \tag{4}$$

*Число* $\sin \dfrac{\pi}{2np}$ *не может быть заменено большим числом.*

Доказательство. Отметим, что абсолютная величина $|\arg(1 - z_k)|$ не превышает величины острого угла $\dfrac{\pi}{2n|p_k|}$ между касательной к окружности $|z| = \sin \dfrac{\pi}{2n|p_k|}$, проходящей через точку $z = 1$ и действительной осью, когда $z_k$ меняется внутри замкнутой области, ограниченной этой окружностью, т. е. $|\arg(1-z_k)| \leqslant \frac{\pi}{2n|p_k|}$, причем равенство достигается только в случае, когда $z_k$ лежит в точке касания. Из равенства $\arg P(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \sum_{k=1}^{n} p_k \arg(1-z_k)$ следует, что $|\arg P| \leqslant \frac{\pi}{2}$, причем, равенство получаем только при $z_k = \sin\frac{\pi}{2n|p_k|} e^{i\alpha_k}$, $\pm\alpha_k = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n|p_k|}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Знак „минус" отвечает второй точке касания. Только в этом исключительном случае произведение $P(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ является чисто мнимым числом. Если заменить круги $|z| < \sin\frac{\pi}{2n|p_k|}$, $k=1, 2, \ldots, n$, кругом $|z| < \sin\frac{\pi}{2np}$, $p = \max|p_k|$, то при произвольном расположении точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$ в нем всегда $\operatorname{Re} P > 0$. Ясно, что этот круг является наибольшим среди кругов с центром в начале координат, обладающих указанным свойством.

Для доказательства первой части теоремы достаточно проверить, что если точки $z_1 \neq z_2$ принадлежат замкнутому кругу $|z| \leqslant \delta \sin\frac{\pi}{2(m+1)}$, то разность

$$f(z_2) - f(z_1) = -\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{m_k} sA_{ks} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{(z-a_k)^{s+1}} \tag{5}$$

отлична от нуля.

Интегрирование в правой части (5) можно производить по прямолинейному отрезку $z_1z_2$. Если действительное переменное $t$ возрастает от 0 до 1, то $z = (1-t)t_1 + tz_2$ описывает этот отрезок и, следовательно,

$$-\frac{f(z_2)-f(z_1)}{z_2-z_1} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{m_k} s\frac{A_{ks}}{(-a_k)^{s+1}} \int_0^1 \frac{dt}{\left(1-\frac{z}{a_k}\right)^{s+1}},$$

$$z = (1-t)z_1 + tz_2. \tag{6}$$

Согласно лемме при $n = 1$, $p_1 = s+1$ действительная часть подынтегральной функции положительна в интервале $0 < t < 1$, так как $\left|\frac{z}{a_k}\right| \leqslant \frac{|z|}{\delta} < \sin\frac{\pi}{2(m+1)} \leqslant \sin\frac{\pi}{2(s+1)}$. Следовательно, действительные части интегралов в (6) положительны. Из условия $\arg\frac{A_{ks}}{(-a_k)^{s+1}} = C = \text{const}$ следует, что все слагаемые в правой части (6) лежат по одну сторону от прямой, которая получается при повороте мнимой оси около начала координат на угол $C$. Следовательно, правая часть (6) не равна нулю.

Чтобы доказать вторую часть теоремы, достаточно найти хотя бы одну функцию $f(z)$ из класса (1), первая производная которой аннулируется в граничной точке области (2). Примером такой функции является $f(z) =$

$= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-i}$, однолистная в замкнутом круге $|z| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ и имеющая производную, равную нулю в точке $s = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Поступила 3.VIII 1964 г.
Пловдив (Болгария)