Еще о точках Лебега—Орлича

Д. В. Салехов

Точка x_0 называется [1] точкой Лебега — Орлича порядка $M(u)$ для функции $f(x)$ из пространства Орлича $L_M^*(0, 1)$, если

$$\lim_{h\to 0} \left\| M^{-1}\left(\frac{1}{2h}\right)[f(x)-f(x_0)]\,\varkappa_h(x)\right\|_M = 0, \tag{1}$$

где $\varkappa_h(x)$ — характеристическая функция интервала (x_0-h, x_0+h), $M^{-1}(u)$— функция, обратная к N-функции $M(u)$, а норма берется в смысле нормы пространства Орлича L_M^* (см. [2]).

Заметим, что это определение является естественным обобщением понятия точки Лебега p-го порядка ($p>1$), т. е. такой точки x_0 функции $f(x)\in L_p$, для которой выполняется

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h}|f(x)-f(x_0)|^p\,dx = 0.$$

В работах [3, 4] формулируются различные теоремы представимости функций $f(x)\in L_M^*$ сингулярным интегралом в точках Лебега — Орлича.

Однако оставался открытым вопрос о пределах применения этих теорем. Известно, например (см. [1]), что при достаточно быстром росте N-функции $M(u)$ в пространстве Орлича L_M^* существует ограниченная функция, не имеющая ни одной точки Лебега — Орлича.

Основным результатом настоящей статьи является следующая теорема.

Теорема. 1°. *Для того чтобы множество точек Лебега — Орлича любой ограниченной функции $f(x)\in L_M^*$ имело полную меру необходимо и достаточно, чтобы N-функция $M(u)$ удовлетворяла Δ_2-условию.*

2°. *Для того чтобы множество точек Лебега — Орлича любой функции $f(x)\in L_M^*$ имело полную меру необходимо и достаточно, чтобы N-функция $M(u)$ удовлетворяла Δ'-условию.*

Напомним, что если при достаточно больших u и некотором $k>0$ выполняется

$$M(2u) < kM(u), \tag{2}$$

то говорят, что N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию.

Если при достаточно больших u и v и некотором $k>0$ выполняется

$$M(uv) < kM(u)M(v), \tag{3}$$

о говорят, что N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ'-условию.

1. Лемма. *Если N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то множество точек Лебега — Орлича характеристической функции $\varkappa_e(x)$ любого множества $e \subset (0, 1)$ имеет полную меру.*

Доказательство. Пусть N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию. Тогда найдется такое $u_0 > 0$ и $k > 0$, что для всех $u > u_0$ будет выполнено

$$M^{-1}\left(\frac{u}{k}\right) < \frac{1}{2} M^{-1}(u). \tag{4}$$

Введем обозначение

$$\varphi_e(h) = \frac{me \cap (x_0 - h, x_0 + h)}{2h}.$$

Пусть точка $x_0 \in e$ — точка плотности множества $e \subset (0, 1)$. При достаточно малом h при фиксированном n будет

$$\varphi_{ce}(h) \leqslant \frac{1}{k^n}; \qquad k^{n-1} \varphi_{ce}(h)\, 2h < \frac{1}{u_0}. \tag{5}$$

Если h такое, что выполнено (5), то из (4) следует

$$\frac{M^{-1}(1/2h)}{M^{-1}(1/\varphi_{ce}(h)\cdot 2h)} \leqslant \frac{M^{-1}\left(\frac{1}{k^n}/\varphi_{ce}(h)\cdot 2h\right)}{M^{-1}(1/\varphi_{ce}(h)\cdot 2h)} \leqslant \frac{1}{2^n}. \tag{6}$$

Далее, пользуясь формулой нормы характеристической функции (см. [2], стр. 89), находим

$$\begin{aligned} &\left\| M^{-1}\left(\frac{1}{2h}\right) [\varkappa_e(x) - \varkappa_e(x_0)]\, \varkappa_h(x) \right\|_M = \\ &= M^{-1}\left(\frac{1}{2h}\right) \varphi_{ce}(h)\cdot 2h \cdot N^{-1}(1/\varphi_{ce}(h)\cdot 2h) = \\ &= H(1/\varphi_{ce}(h)\cdot 2h) \cdot \frac{M^{-1}(1/2h)}{M^{-1}(1/\varphi_{ce}(h)\cdot 2h)}, \end{aligned} \tag{7}$$

где функция $H(u) = M^{-1}(u) N^{-1}(u)/u$ удовлетворяет условию $1 < H(u) \leqslant 2$ (см. [2], стр. 148).

Из неравенства (6) и (7) следует, что точка x_0 — точка Лебега — Орлича функции $\varkappa_e(x)$.

Пусть $x_0 \in ce$ и является его точкой плотности. При любом $x_0 \in (0, 1)$

$$|\varkappa_{ce}(x) - \varkappa_{ce}(x_0)| = |\varkappa_e(x) - \varkappa_e(x_0)|. \tag{8}$$

Как уже доказано, точка x_0 — точка Лебега — Орлича функции $\varkappa_{ce}(x)$. Поэтому, учитывая (8), заключаем, что любая точка $x_0 \in ce$, являющаяся его точкой плотности, есть точка Лебега — Орлича функции $\varkappa_e(x)$.

Лемма доказана.

Теорема 1. *Если N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то множество точек Лебега — Орлича любой ограниченной функции имеет полную меру.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ ограничена: $|f(x)| < A$. По теореме Лузина для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $e \subset (0, 1)$, что $me > 1 - \varepsilon$ и на множестве e функция $f(x)$ непрерывна. Пусть e_1 —

множество точек плотности множества e. Пусть $x_0 \in e_1$. Тогда

$$\left\| M^{-1}\left(\frac{1}{2h}\right)[f(x)-f(x_0)]\,\varkappa_h(x)\right\|_M \leqslant$$

$$\leqslant \left\| M^{-1}\left(\frac{1}{2h}\right)[f(x)-f(x_0)]\,\varkappa_{e_1\cap(x_0-h,x_0+h)}(x)\right\|_M +$$

$$+\left\| M^{-1}\left(\frac{1}{2h}\right)[f(x)-f(x_0)]\,\varkappa_{ce_1\cap(x_0-h,x_0+h)}(x)\right\|_M = I_{1,h}+I_{2,h}.$$

Величина $I_{1,h}\to 0$ при $h\to 0$ в силу непрерывности функции $f(x)$ на e_1 и свойства функции $H(u)$.

Далее,

$$I_{2,h}\leqslant 2A\left\| M^{-1}\left(\frac{1}{2h}\right)\varkappa_{ce_1\cap(x_0-h,x_0+h)}(x)\right\|_M.$$

Точка $x_0\in e_1$ — точка плотности $e_1=c(ce_1)$. Поэтому, как показано в лемме, она является точкой Лебега — Орлича функции $\varkappa_{ce_1}(x)$. Таким образом, любая точка $x\in e_1$ есть точка Лебега — Орлича функции $f(x)$. Так как $me_1>1-\varepsilon$ и $\varepsilon>0$ произвольно, то теорема доказана.

2. Теорема 2. *Если N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ'-условию, то множество точек Лебега — Орлича любой функции $f(x)\in L_M^*$ имеет полную меру.*

Доказательство. Достаточно доказать теорему для неотрицательной функции $f(x)\in L_M^*$. Пусть $n_0>u_0$, где u_0 — такое число, что для всех $u>u_0$ и $v>u_0$ имеет место неравенство (3). Обозначим через e_1 и e_2 множества

$$\begin{aligned} e_1&=\mathscr{E}\{f(x)\leqslant n_0\},\\ e_2&=\mathscr{E}\{f(x)>n_0\}. \end{aligned}\tag{9}$$

Пусть n_0 настолько велико, что $me_1>1-\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ фиксировано. Обозначим

$$f_i(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } x\in e_i\\ 0, & \text{если } x\,\overline{\in}\, e_i.\end{cases}\quad (i=1,2),$$

Функция $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$.

Так как N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ'-условию, то, как известно [2], она удовлетворяет Δ_2-условию. Функция $f_1(x)$ ограничена. Поэтому на основании теоремы 1 множество точек Лебега — Орлича функции $f_1(x)$ имеет полную меру.

Обозначим через $E=E_1\cap e_1$. При этом $mE=me_1>1-\varepsilon$.

В условиях теоремы функция $M[f(x)]$ суммируема. Так как при любом $v>v_0\geqslant 0$

$$M(v-v_0)\leqslant M(v)-M(v_0),$$

то для положительной функции $f(x)$

$$\frac{1}{h}\int_{x_0-h}^{x_0+h} M[f(x)-f(x_0)]\,dx\leqslant \frac{1}{h}\int_{x_0-h}^{x_0+h}|M[f(x)]-M[f(x_0)]|\,dx.\tag{10}$$

Правая часть неравенства (10) на множестве полной меры стремится к нулю при $h\to 0$. Обозначим это множество через E'. Пусть $E^*=E'\cap E$. Пусть $x_0\in E^*$. Тогда при $h<1/2M(u_0)$ получим, учитывая (3),

$$\int_{x_0-h}^{x_0+h} M\left\{M^{-1}\left(\frac{1}{2h}\right)[f_2(x)-f_2(x_0)]\right\}dx =$$

$$= \int_{x_0-h}^{x_0+h} M\left\{M^{-1}\left(\frac{1}{2h}\right)f_2(x)\right\}dx \leqslant \frac{k}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h} M[f_2(x)]\,dx.$$

Откуда следует

$$\lim_{h\to 0}\int_{x_0-h}^{x_0+h} M\left\{M^{-1}\left(\frac{1}{2h}\right)[f_2(x)-f_2(x_0)]\right\}dx = 0. \qquad ($$

Так как N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то из (11) с дует, что точка x_0 есть точка Лебега — Орлича функции $f_2(x)$, а сле вательно, и функции $f(x)$. Так как $mE^* = mE' \cap E = mE > 1-\varepsilon$, а ε можно взять произвольно, то теорема 2 доказана.

3. Для дальнейшего потребуется один специальный класс множес Пусть $\{k_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность целых возрастающих ложительных чисел.

Из отрезка $[0, 1]$ выбросим симметрично в нем и на равном расстоя друг от друга расположенные r_1 интервалов $\alpha^1_{i_1}$ каждый длиной d_1, при

$$r_1 = 2^{k_1},$$

$$d_1 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\right)\frac{1}{2^{k_1}}.$$

Оставшееся в $[0,1]$ множество обозначим E_1, а через $\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_1 = [0,1]\setminus E_1$. При этом

$$mE_1 = \frac{1}{2^2}, \qquad m\mathscr{E}_1 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}.$$

В каждом из интервалов $\alpha^1_{i_1}$ $(i_1 = 1, 2, \ldots, 2^{k_1})$ выбросим симметри в $\alpha^1_{i_1}$ и на равном расстоянии друг от друга расположенные r_2 интерва каждый длиной d_2, при этом

$$r_2 = 2^{k_2-k_1},$$

$$d_2 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}\right)\frac{1}{2^{k_2}}.$$

Выброшенные интервалы обозначим $\alpha^2_{i_2}$ $(i_2 = 1, 2, \ldots, r_1\cdot r_2)$. Ост шееся в $\mathscr{E}_1$ множество обозначим через E_2 и через $\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_1\setminus E_2$. Замет что

$$m\mathscr{E}_2 = d_2\cdot r_1\cdot r_2 = \frac{1}{2}+\frac{1}{2^3},$$

$$mE_2 = m\mathscr{E}_1\setminus\mathscr{E}_2 = \frac{1}{2^3}.$$

Этот процесс продолжим неограниченно.

Пусть множества E_n и $\mathscr{E}_n$ построены. Заметим, что множес E_n — то множество, которое остается после выбрасывания каждого интервала системы интервалов $\{\alpha^{n-1}_{i_{n-1}}\}$ $(i_{n-1} = 1, 2, \ldots, r_1 \ldots r_{n-1})$ r_n интервалов одинаковой длины d_n, расположенных в $\alpha^{n-1}_{i_{n-1}}$ сı метрично и на равном расстоянии друг от друга. При этом

$$r_n = 2^{k_n - k_{n-1}},$$
$$d_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \cdot \frac{1}{2^{k_n}} . \tag{12}$$

Систему интервалов, образованную в процессе построения множества E_n, обозначим $\{\alpha^n_{i_n}\}$ $(i_n = 1, 2, \ldots, r_1 \cdot r_2 \ldots r_n)$. Множество

$$\mathscr{E}_n = \bigcup_{i_n=1}^{r_1 \ldots r_n} \alpha^n_{i_n}.$$

Меры множеств $\mathscr{E}_n$ и E_n выражаются формулами

$$m\mathscr{E}_n = d_n \cdot r_1 \cdot r_2 \ldots r_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} ,$$

$$mE_n = m\mathscr{E}_{n-1} \setminus \mathscr{E}_n = \frac{1}{2^{n+1}} .$$

Для построения множеств E_{n+1} и $\mathscr{E}_{n+1}$ в каждом из интервалов $\alpha^n_{i_n}$ выбрасываем симметрично в $\alpha^n_{i_n}$ и на равном расстоянии друг от друга расположенные r_{n+1} интервалов длиной d_{n+1}.

При этом

$$r_{n+1} = 2^{k_{n+1} - k_n},$$

$$d_{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+2}}\right) \cdot \frac{1}{2^{k_{n+1}}} .$$

Оставшееся в $\mathscr{E}_n$ множество обозначим через E_{n+1}, а через $\mathscr{E}_{n+1}$ — $\mathscr{E}_{n+1} = \mathscr{E}_n \setminus E_{n+1}$. И т. д. до бесконечности.

Введем обозначения $E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$, $\mathscr{E} = [0,1] \setminus E$. Тогда

$$mE = \sum_{n=1}^{\infty} mE_n = \frac{1}{2} ,$$

$$m\mathscr{E} = \frac{1}{2} .$$

Заметим для дальнейшего, что

$$mE_{n+1} \cap \alpha^n_{i_n} = \frac{mE_{n+1}}{r_1 \cdot r_2 \ldots r_n} = \frac{1}{2^{n+2} \cdot 2^{k_n}} . \tag{13}$$

4. Пусть $e \subset [0, 1]$ и x_0 — точка плотности множества e. Пусть $\psi(h)$ — положительная убывающая функция определенная на $(0,1)$ такая, что $\psi(h) \to 1$ при $h \to 0$.

Точка x_0 называется точкой плотности множества e порядка $\psi(h)$ [1], если найдется такое $h_0 > 0$, что для всех $h < h_0$ выполняется

$$\frac{me \cap (x_0 - h,\ x_0 + h)}{2h} > \psi(h).$$

Пусть $\varphi(h) = 1 - \psi(h)$. Функция $\varphi(h)$ возрастает.

Если найдется такая последовательность $\{h_n\}$ $(h_n \to 0)$ и такое постоянное число $a > 0$, что

$$\frac{mce \cap (x_0 - h_n,\ x_0 + h_n)}{2h_n} \geqslant a\varphi(h_n),$$

то говорят, что порядок плотности множества e в точке x_0 не превышает порядок $\psi(h)$.

Теорема 3. *Для любого порядка плотности $\psi(h)$ существует такое множество, множество точек плотности которого с порядком плотности, не превышающим данный порядок $\psi(h)$, имеет положительную меру.*

Доказательство. Возьмем произвольный порядок плотности $\psi(h)$ и функцию $\varphi(h) = 1 - \psi(h)$. Пусть k_1 — такое целое число, что

$$d_1 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}}{2^{k_1}} < \varphi^{-1}\left[1/2^2\left(1 + \frac{1}{2}\right)\right].$$

Пусть $k_2 > k_1$ и — такое целое число, что

$$d_2 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3}}{2^{k_2}} < \varphi^{-1}\left[1/2^3\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\right],$$

. . . .

Пусть $k_n > k_{n-1}$ и — такое целое число, что

$$d_n = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}}{2^{k_n}} < \varphi^{-1}\left[1/2^{n+1}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)\right], \tag{14}$$

. . . .

Получим возрастающую последовательность положительных целых чисел $\{k_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

По последовательности $\{k_n\}$ строим множества E и $\mathscr{E}$.

Пусть $x_0 \in \mathscr{E}$. Оценим порядок плотности множества $\mathscr{E}$ в точке x_0. Так как $\mathscr{E} = [0,1] \setminus E$, а $E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n$, то найдется последовательность вложенных друг в друга интервалов

$$\alpha^{1_0}_{i_1} \supset \alpha^{2_0}_{i_2} \supset \ldots \supset \alpha^{n_0}_{i_n} \supset \ldots,$$

содержащая точку x_0.

Пусть h_n' и h_n'' — такие положительные числа, что $\alpha^{n_0}_{i_n} = (x_0 - h_n',\ x_0 + h_n'')$. Тогда длина интервала $(x_0 - h_n',\ x_0 + h_n'') = d_n$.

Найдем отношение

$$\frac{m\mathscr{E} \cap \alpha^{n_0}_{i_n}}{d_n} = 1 - \frac{mE \cap \alpha^{n_0}_{i_n}}{d_n} < 1 - \frac{mE_{n+1} \cap \alpha^{n_0}_{i_n}}{d_n}.$$

Пользуясь формулами (12) и (13), находим

$$\frac{mE_{n+1} \cap \alpha^{n_0}_{i_n}}{d_n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)2^{n+1}}.$$

Из формулы (14) следует, что

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)2^{n+1}} > \varphi(d_n).$$

Поэтому

$$\frac{mE_{n+1} \cap \alpha^{n_0}_{i_n}}{d_n} > \varphi(d_n).$$

Откуда следует:

$$\frac{mc\mathscr{E} \cap (x_0 - h'_n,\ x_0 + h''_n)}{h'_n + h''_n} > \varphi(h'_n + h''_n).$$

Из этого неравенства, верного при любом $n = 1, 2, \ldots$, следует утверждение теоремы.

Теорема доказана.

5. Пусть N-функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2-условию. Тогда найдется такая последовательность чисел $v_n \to \infty$, что при любом $n = 1, 2, \ldots$ будет

$$M(2v_n) > 2^n M(v_n).$$

Положим $h_n = 1/M(v_n)$. Тогда при любом $n = 1, 2, \ldots$

$$\frac{M^{-1}\left(\frac{1}{h_n}\right)}{M^{-1}\left(\frac{2^n}{h_n}\right)} > \frac{1}{2}. \tag{15}$$

Теорема 4. *Если N-функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2-условию, то существует ограниченная функция, у которой множество точек, не являющихся точками Лебега — Орлича, имеет положительную меру.*

Доказательство. Пусть функция $\psi(h)$ определена на интервале $(0,1)$, монотонно возрастает и в точках h_n, где h_n — числа, фигурирующие в (15), удовлетворяет равенству

$$\varphi(h_n) = \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Построим возрастающую последовательность целых чисел $\{k_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ таких, чтобы при любом n имеет место неравенство

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}}{2^{k_n+1}} < \varphi^{-1}\left(\frac{1}{2^{n+2}}\right) \leqslant \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}}{2^{k_n}}. \tag{16}$$

По последовательности $\{k_n\}$ строим множества E и $\mathscr{E}$.

Покажем, что каждая точка множества $\mathscr{E}$ не является точкой Лебега — Орлича характеристической функции $\varkappa_E(x)$.

Пусть $x_0 \in \mathscr{E}$. Тогда найдется последовательность вложенных друг в друга интервалов

$$\alpha^{1_0}_{i_1} \supset \alpha^{2_0}_{i_2} \supset \ldots \supset \alpha^{n_0}_{i_n} \supset \ldots,$$

содержащая точку x_0. Обозначим через h'_n и h''_n такие положительные числа, чтобы $\alpha^{n_0}_{i_n} = (x_0 - h'_n,\ x_0 + h''_n)$. Тогда $h'_n + h''_n = d_n$, где d_n — длина интервала $\alpha^{n_0}_{i_n}$. Далее находим

$$\left\| M^{-1}\left(\frac{1}{d_n}\right)[\varkappa_E(x) - \varkappa_E(x_0)]\,\varkappa_{(x_0 - h'_n,\ x_0 + h''_n)}(x) \right\|_M =$$

$$= M^{-1}\left(\frac{1}{d_n}\right) mE \cap \alpha^{n_0}_{i_n} N^{-1}\left(1/mE \cap \alpha^{n_0}_{i_n}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{M^{-1}\left(\frac{1}{d_n}\right)}{M^{-1}\left(1/mE \cap \alpha^{0}_{i_n}\right)} \geqslant \frac{M^{-1}\left(\frac{1}{d_n}\right)}{M^{-1}\left(1/mE_{n+1} \cap \alpha^{n_0}_{i_n}\right)} =$$

$$= \frac{M\left(\frac{1}{d_n}\right)}{M^{-1}\left(\frac{d_n}{mE_{n+1} \cap \alpha^{n_0}_{i_n}} \cdot \frac{1}{d_n}\right)}. \tag{17}$$

Так как

$$d_n = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}}}{2^{k_n}},$$

то из (16) находим

$$\frac{1}{2h_n} \leqslant \frac{1}{d_n} < \frac{1}{h_n}.$$

Учитывая, что

$$\frac{mE_{n+1} \cap \alpha^{n_0}_{i_n}}{d_n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) 2^{n+1}},$$

получим

$$\frac{M^{-1}\left(\frac{1}{d_n}\right)}{M^{-1}\left(\frac{d_n}{mE_{n+1} \cap \alpha^{n_0}_{i_n}} \cdot \frac{1}{d_n}\right)} > \frac{M^{-1}\left(\frac{1}{h_n}\right)}{8M^{-1}\left(\frac{2^n}{h_n}\right)}. \tag{18}$$

Из неравенств (15), (17) и (18) следует, что точка x_0 не является точкой Лебега — Орлича характеристической функции $\varkappa_E(x)$.

Теорема доказана.

6. Если N-функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ'-условию, то найдется последовательность $\{u_n\} \to \infty$ и последовательность $\{v_n\} \to \infty$ такие, что

$$M(u_n v_n) > 2^n M(u_n) M(v_n). \tag{19}$$

Т е о р е м а 5. *Если N-функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ'-условию, то в пространстве Орлича L^*_M найдется такая функция $f(x)$, у которой множество точек, не являющихся точками Лебега — Орлича, имеет положительную меру.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$ — последовательности, удовлетворяющие (19). Обозначим через h_n

$$h_n = \frac{1}{2M(u_n)} \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

через k_n — числа, удовлетворяющие условию

$$2^{k_n} \leqslant \frac{1}{h_n} < 2^{k_n+1}. \tag{20}$$

При этом можно считать, что $k_n > k_{n-1}$. Если для некоторых h_n и h_{n-1} это не так, то через h_n обозначим h_k с более высоким номером k. Заметим, что неравенство (19) тогда будет выполнено и подавно.

По последовательности $\{k_n\}$ строим множества E и $\mathscr{E}$.

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} v_n, & \text{если } x \in \overline{E}_{n+1}, \\ 0, & \text{если } x \,\overline{\in} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{E}_{n+1}, \end{cases}$$

где $\overline{E}_{n+1}$ — часть множества E_{n+1}, равномерно сосредоточенная по составляющим E_{n+1} сегментам с мерой

$$m\overline{E}_{n+1} = mE_{n+1}/M(v_n).$$

Функция $f(x) \in L_M^*$, так как

$$\int_0^1 M[f(x)]\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_{n+1}} M[f(x)]\,dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} M(v_n)\, m\overline{E}_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} mE_{n+1} = \frac{1}{4}\,.$$

Покажем, что любая точка $x_0 \in \mathscr{E}$ не является точкой Лебега — Орлича функции $f(x)$.

Интерес представляет случай, когда N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию. Если N-функция $M(u)$ не удовлетворяет Δ_2-условию, то по теореме 4 существует ограниченная функция, у которой множество точек, не являющихся точками Лебега — Орлича, имееет положительную меру. Заметим, как показано в [2], что существует N-функция $M(u)$, удовлетворяющая Δ_2-условию, но не удовлетворяющая Δ'-условию.

Если N-функция $M(u)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то сходимость в среднем эквивалентна сходимости по норме. Поэтому, чтобы убедиться, что в точке $x_0 \in \mathscr{E}$ не выполняется условие (1), достаточно показать, что

$$\overline{\lim_{h\to 0}} \int_{x_0-h}^{x_0+h} M\left\{M^{-1}\left(\frac{1}{2h}\right)[f(x) - f(x_0)]\right\} dx > 0.$$

Пусть $x_0 \in \mathscr{E}$. Тогда x_0 принадлежит системе интервалов

$$\alpha^1_{i^0_1} \supset \alpha^2_{i^0_2} \supset \ldots \supset \alpha^n_{i^0_n} \supset \ldots$$

Обозначим через h'_n и h''_n такие положительные числа, что интервал $(x_0 - h'_n, x_0 + h''_n) = \alpha^n_{i^0_n}$.

Оценим интеграл

$$\int_{x_0-h'_n}^{x_0+h''_n} M\left\{M^{-1}\left(\frac{1}{h'_n + h''_n}\right)[f(x) - f(x_0)]\right\} dx =$$

$$= \int\limits_{x_0-h_n'}^{x_0+h_n''} M\left[M^{-1}\left(\frac{1}{d_n}\right) f(x)\right] dx >$$

$$> \int\limits_{\overline{E}_{n+1}\cap\alpha^{n_0}_{i_n}} M\left[M^{-1}\left(\frac{1}{d_n}\right) v_n\right] dx =$$

$$= M\left[M^{-1}\left(\frac{1}{d_n}\right) v_n\right] m\overline{E}_{n+1} \cap \alpha^{n_0}_{i_n} =$$

$$= M\left[M^{-1}\left(\frac{2^{k_n}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}}\right) v_n\right] m\overline{E}_{n+1} \cap \alpha^{n_0}_{i_n} >$$

$$> M[M^{-1}(2^{k_n}) v_n]\, m\overline{E}_{n+1} \cap \alpha^{n_0}_{i_n}. \tag{21}$$

Так как

$$u_n = M^{-1}\left(\frac{1}{2h_n}\right)$$

и $1/2h_n < 2^{k_n}$ (неравенства (20)), то

$$M[M^{-1}(2^{k_n}) v_n]\, m\overline{E}_{n+1} \cap \alpha^{n_0}_{i_n} >$$

$$> M(u_n v_n)\, m\overline{E}_{n+1} \cap \alpha^{n}_{i_n} =$$

$$= M(u_n v_n)\, mE_{n+1} \cap \alpha^{n_0}_{i_n} / M(v_n).$$

Пользуясь неравенствами (19), (20) и формулой (13), получим

$$M[M^{-1}(2^{k_n}) v_n]\, m\overline{E}_{n+1} \cap \alpha^{n_0}_{i_n} >$$

$$> \frac{M(u_n)}{4\cdot 2^{k_n}} = \frac{1}{8\cdot 2^{k_n}\cdot h_n} > \frac{1}{8}. \tag{22}$$

Из неравенств (21) и (22) следует, что точка x_0 не является точкой Лебега — Орлича функции $f(x)$.

Теорема доказана.

7. Утверджение основной теоремы, приведенной во введении, следует из теорем 1, 2, 4, 5.

Автор выражает благодарность С. Г. Крейну за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. В. Салехов, О точках Лебега — Орлича, ДАН СССР, т. 116, № 3, 1957.
2. М. А. Красносельский и Я. Б. Рутицкий, Выпуклые функции и пространства Орлича, Физматгиз, М., 1958.
3. Д. В. Салехов, К вопросу о представимости сингулярным интегралом функций, принадлежащих классам Орлича, УМЖ, т. XIII, № 4, 1961.
4. R. Taberski, O zbieznosci calek osobliwych w punktach Lebesque'a — Orlieza pewnych funkcji, Roczn. Polsk. towarz, mat. Ser. 1., Prace mat., 5, 1961, 33—42.

Поступила 4.V 1964 г.
Воронеж