Об одном принципе двойственности

М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц

Как выяснено в последнее время, в вопросах изучения периодических решений уравнений с отклоняющимся аргументом существенную роль играют так называемые «принципы двойственности», связывающие топологические характеристики различных операторов, описывающих множество периодических решений дифференциального уравнения. Один из таких принципов предлагается в настоящей статье.

1. Рассмотрим пространство $C[-\omega, \omega]$ функций, непрерывных на отрезке $[-\omega, \omega]$. Определенный на $C[-\omega, \omega]$ оператор F назовем вольтерровским, если для любых двух функций $x(t)$, $y(t) \in C[-\omega, \omega]$ из равенства $x(\tau) = y(\tau)$ при $-\omega \leqslant \tau \leqslant t_0$ вытекает, что функции $Fx(t)$ и $Fy(t)$ также принимают одинаковые значения при $t \leqslant t_0$. Иначе говоря, оператор F — вольтерровский, если значения функции $Fx(t)$ при $t = t_0$ определяются лишь значениями $x(t)$ при $t \leqslant t_0$.

Значения вольтерровских операторов могут принадлежать различным функциональным пространствам. В настоящей статье будут рассматриваться вольтерровские операторы, действующие из $C[-\omega, \omega]$ в пространство $C[0, \omega]$ непрерывных на $[0, \omega]$ функций.

Вольтерровские операторы естественным образом возникают в различных эволюционных задачах.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Fx(t) \tag{1}$$

с вольтерровским оператором F. Решением этого уравнения мы будем считать непрерывные на $[-\omega, \omega]$ функции, удовлетворяющие уравнению (1) при $t_0 < t \leqslant \omega$, где t_0 — любое фиксированное число из $[0, \omega]$. Будем считать, что решения уравнения (1) определяются единственным образом по своим значениям на промежутке $[-\omega, t_0]$, причем в качестве этих «начальных» значений может рассматриваться любая непрерывная на $[-\omega, t_0]$ функция $x_0(t)$.

Пусть $x(t) \in C[0, \omega]$. Обозначим через $y(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \omega)$ значения решения уравнения (1), соответствующего начальной функции $x_0(t) = x(t + \omega)(-\omega \leqslant t \leqslant 0)$. Оператор

$$Ux(t) = y(t) \qquad (x(t) \in C[0, \omega]) \tag{2}$$

естественно назвать (см. [1]) оператором сдвига по траекториям уравнения (1). В дальнейшем предполагается, что этот оператор вполне непрерывен.

Нас будут интересовать неподвижные точки оператора сдвига U (к вопросу о существовании этих неподвижных точек приводится ряд задач о периодических решениях различных эволюционных уравнений). Легко видеть, что функция $x(t) \in C[0, \omega]$ является неподвижной точкой оператора U в том и только том случае, если функция

$$z(t) = \begin{cases} x(t+\omega), & \text{если } -\omega \leqslant t \leqslant 0, \\ x(t), & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant \omega, \end{cases}$$

является при $0 < t \leqslant \omega$ решением уравнения (1). Заметим, что каждая неподвижная точка $x(t)$ на концах промежутка $[0, \omega]$ принимает одинаковые значения.

Неподвижные точки оператора сдвига U можно, очевидно, определить и как неподвижные точки нелинейного интегрального оператора

$$Ax(t) = x(\omega) + \int_0^t F[Sx(\tau)]\, d\tau, \tag{3}$$

где

$$Sx(\tau) = \begin{cases} x(t+\omega), & \text{если } -\omega \leqslant t \leqslant 0, \\ x(t) + x(\omega) - x(0), & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant \omega. \end{cases} \tag{4}$$

Будем считать, что оператор A вполне непрерывен в $C[0, \omega]$.

Возникает естественный вопрос о том, как связаны вращения вполне непрерывных векторных полей

$$\Phi x = x - Ux \tag{5}$$

и

$$\Psi x = x - Ax. \tag{6}$$

Ниже доказывается, что в естественных предположениях эти вращения на границе любой ограниченной области одинаковы

Этот важный факт полезен как при доказательстве различных теорем существования, так и при исследовании свойств решений эволюционных уравнений. Отметим, что оператор сдвига U в явном виде известен лишь в исключительных случаях, интегральный же оператор A выписывается в явном виде. Поэтому в некоторых случаях проще вычисляется вращение поля (6). В то же время при исследовании свойств решений уравнения (1) (например при исследовании устойчивости решений) удобнее пользоваться оператором сдвига.

2. Пусть Γ — граница некоторой ограниченной области в пространстве $C[0, \omega]$. Предположим, что оператор сдвига не имеет на Γ неподвижных точек. Тогда оба векторных поля (5) и (6) невырождены на Γ Интересующее нас утверждение будет доказано, если мы построим гомотопный переход на Г от поля (6) к полю (5). Для простроения такого гомотопного перехода здесь будет применен метод, который естественно назвать методом «скользящего решения».

Пусть λ — скалярный параметр, принимающий значения из промежутка $[0, \omega]$. Через S_λ обозначим действующий из $C[0, \omega]$ в $C[-\omega, \omega]$ оператор, определенный равенством

$$S_\lambda x(t) = \begin{cases} x(t+\omega), & \text{если } -\omega \leqslant t \leqslant 0, \\ x(t) + x(\omega) - x(0), & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant \lambda, \\ y(t), & \text{если } \lambda \leqslant t \leqslant \omega, \end{cases} \tag{7}$$

где через $y(t)$ обозначено решение уравнения (1), соответствующее начальной функции $S_\lambda x(t)$ $(-\omega \leqslant t \leqslant \lambda)$.

Определим семейство векторных полей

$$\Phi_\lambda x(t) = x(t) - x(\omega) - \int_0^t F[S_\lambda x(\tau)]\, d\tau \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant \omega). \tag{8}$$

В естественных предположениях можно считать, что поля (8) вполне непрерывны и непрерывно зависят от параметра λ. При $\lambda = \omega$ поле (8) переходит в поле (6). При $\lambda = 0$ поле (8) переходит в поле (5). Действительно, из (7) вытекает, что

$$\frac{dS_0 x(\tau)}{d\tau} = F[S_0 x(\tau)] \quad (0 < \tau \leqslant \omega),$$

и поэтому

$$\Phi_0 x(t) = x(t) - x(\omega) - [S_0 x(t) - S_0 x(0)] = x(t) - Ux(t).$$

Таким образом, для доказательства гомотопности полей (5) и (6) достаточно проверить, что поля (8) не вырождаются на Г. Предположим противное; пусть при некотором $\lambda_0 \in (0, \omega)$ имеет место равенство

$$x(t) = x(\omega) + \int_0^t F[S_{\lambda_0} x(\tau)]\, d\tau, \tag{9}$$

где $x(t)$ — некоторая функция, принадлежащая Г. Из (9) вытекает, что $S_{\lambda_0} x(t)$ является решением уравнения (1) не только при $t > \lambda_0$, но и при всех $t \geqslant 0$. Поэтому $S_{\lambda_0} x(t) = S_0 x(t)$, и равенство (9) означает, что $x(t)$ является неподвижной точкой оператора сдвига. Мы пришли к противоречию, так как по предположению оператор сдвига U не имеет на Г неподвижных точек.

3. В качестве простейшего примера рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение с непрерывной правой частью

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{10}$$

Для этого уравнения полная непрерывность полей (5), (6) и (8) очевидна. Очевидна и непрерывная зависимость полей (8) от параметра λ (если, конечно, предполагать, что решения уравнения (10) однозначно определяются начальными условиями и продолжимы на промежуток длины ω). В случае уравнения (10) поле (6) имеет вид

$$\Psi x(t) = x(t) - x(\omega) - \int_0^t f[\tau, x(\tau) + x(\omega) - x(0)]\, d\tau. \tag{11}$$

При изучении периодических решений уравнения (10) и уравнений с отклоняющимися аргументами иногда (см., например, [2, 3]) удобнее рассматривать отличное от (11) поле

$$\Psi_1 x(t) = x(t) - x(\omega) - \int_0^t f[\tau, x(\tau)]\, d\tau.$$

Поле Ψ_1 гомотопно полю Ψ; гомотопный переход можно определить при помощи семейства полей

$$\Psi_\lambda x(t) = x(t) - x(\omega) - \int_0^t f\{\tau, x(\tau) + \lambda [x(\omega) - x(0)]\}\, d\tau,$$

где $\lambda \in [0,1]$.

4. Проведенные выше рассуждения не меняются, если вместо скалярного уравнения (1) рассматривать векторные уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения, Физматгиз, М., 1959.
2. М. А. Красносельский, В. В. Стрыгин, ДАН СССР, т. 152, № 3, 1963.
3. М. А. Красносельский, ДАН СССР, т. 152, № 4, 1963.

Поступила 30.III 1965 г.

Воронеж